

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2023.09.007

高维时变协高阶矩建模及其投资组合应用^①

——基于半参数分布因子模型

黄光麟¹, 鲁万波^{2*}

(1. 西南财经大学统计学院, 成都 611130; 2. 西南财经大学管理科学与工程学院, 成都 611130)

摘要: 本研究提出了一种基于半参数分布时变因子模型的动态协高阶矩建模方法, 给出了模型设定、模型估计和时变高阶矩的检验. 通过因子模型有效缓解了动态协高阶矩估计存在的“维数灾难”问题, 同时通过引入半参数分布增加了模型的稳健性. 实证研究表明: 相比于现有协高阶矩估计方法, 基于因子模型的动态建模能够有效捕捉资产收益率协高阶矩的时变结构, 同时更加契合金融资产收益率的潜在特征; 动态投资组合能够应用于高维场景, 并产生更高且更稳定的经济价值. 稳健性分析进一步证实了这一点.

关键词: 因子模型; 半参数分布; 时变协高阶矩建模; 动态投资组合

中图分类号: O212 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2023)09-0125-16

0 引言

国内外大量金融资产收益率的实证研究表明, 基于正态分布假设的传统建模方法不再适用^[1-4]. 同时, 这也导致了马克维茨的均值-方差分析和期望效用原则具有一致性的充分条件不再成立^[5]. 马克维茨经典的均值-方差投资组合模型要求投资者效用函数为二次形式或者资产收益率分布服从正态分布, 然而现有的大量研究表明这两个假设难以满足. 一方面, Scott 和 Horvath 认为将投资者的效用函数看作二次型并不恰当, 他们指出在投资组合收益率分布是非对称或厚尾时, 投资者无法利用二次形式效用函数刻画完全的分布形式, 所以投资者必须考虑投资组合收益率的高阶矩, 如偏度和峰度等^[6]. 另一方面, Arrow 的研究表明由于资产收益率分布的非正态性, 二次效用函数并不能反映投资者绝对风险厌恶递减的特征, 因此均值-方差投资组合面临着严重的福利损失^[7]. Dittmar, Mitton 和 Vorkink 实证发现投资者愿意牺牲较小的收益和较大的波

动性去换取一个正偏度和一个较小的峰度的投资组合^[8]. 另外, 国内大量文献证实了高阶矩在风险管理、经济预测和资产定价等方面发挥着重要的作用^[9-11].

根据现有文献将高阶矩引入到投资组合中主要有两种方法: 直接法和间接法. 直接法是将资产投资组合收益率的高阶矩直接加入到均值-方差投资组合模型中作为目标函数, 形成均值-方差-偏度或均值-方差-偏度-峰度投资组合模型^[12]. 但由于直接法的经济含义模糊和多元非凸规划问题求解困难限制了直接法在高阶矩投资组合模型的发展和应用. 间接法则通过泰勒展开, 将投资者关注的函数展开为多项式形式, 然后再给定阶数, 通过优化这个多项式求解最优投资组合权重. 这种方法将投资组合的均值-方差-偏度-峰度优化问题转化为一个包含均值、方差、偏度和峰度函数的优化问题. 例如, 以优化投资者期望效用(expected utility, EU) 为目标^[9, 13]; 或以最优优化投资组合的尾部风险为目标, 例如在险价值

① 收稿日期: 2020-11-11; 修订日期: 2022-06-05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71771187; 72011530149; 72163029); 中央高校基本科研基金资助项目(JBK190602).

通讯作者: 鲁万波(1977—), 男, 贵州贵阳人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: luwb@swufe.edu.cn

(value-at-risk) 和期望损失(expected shortfall) 通过 Cornish-Fisher 展开为多项式进行优化^[14, 15]。间接法的优点在于可以将多目标优化问题转化为投资组合各阶矩函数的单目标优化问题, 能够直接反映投资者追求的目标和高阶矩对投资组合的边际影响, 增加了求解的可行性, 同时也保证了这种方法能够构造资产个数较多的投资组合, 因此得到了广泛的应用。

综上所述, 基于高阶矩的投资组合逐渐引起学者重视, 但不可避免的会面临协高阶矩存在的“维数灾难”问题。“维数灾难”是由于待估参数过多导致的“估计不准”与“实现困难”。例如, 包含 15 只股票的投资组合的协方差, 协偏度, 协峰度矩阵共有 3 860 个参数需要估计, 这些待估参数还会随着资产规模增加呈指数型增长, 而在时变协高阶矩的估计中, 由于需要考虑高阶矩的时变结构, “维数灾难”的问题更加严重。目前, 现有的时变高阶矩投资组合考虑的资产规模均小于 15 只^[9, 16, 17]。时变协高阶矩的估计困难大大限制了高阶矩投资组合在金融市场的应用。为了有效解决时变协高阶矩难估计, 动态高阶矩投资组合难使用的问题, 本研究提出了一种基于半参数分布时变因子(single factor time-varying semi-nonparametric, SF-TVSNP) 模型的动态协高阶矩建模方法, 一方面通过单因子模型有效缓解了协高阶矩估计的“维数灾难”问题, 另一方面通过引入半参数分布减少模型可能存在的误设, 增加模型稳健性。在因子模型设定恰当的情况下, 各资产收益率可以用因子和异质性成分的线性组合解释, 可以通过适当的分解将协高阶矩的时变结构拆分为因子的时变结构和各异质性成分的时变结构, 然后分别进行估计。基于沪深 300 指数成分股的投资组合分析, 本研究证实了 SF-TVSNP 模型存在的额外经济价值, 以及它在投资组合中表现出的稳健性。

1 文献综述

对于本研究相关的文献综述将从两个视角展开: 第一, 作为因子模型在估计协高阶矩上的应用, 有必要对基于因子模型估计协高阶矩的相关

文献进行评述; 第二, 作为一种新的时变协高阶矩建模方法, 需要对现有的时变协高阶矩估计文献进行评述。最后, 本节将总结现有文献存在的问题以及本研究的创新点。

因子模型可以作为一个非常有效的途径来解决协高阶矩估计中存在的“维数灾难”问题。通过对资产收益率施加一个线性因子的结构, 将协高阶矩的待估参数结构化, 从而大大减少待估参数个数。例如, 前文提到的包含 15 只股票的投资组合的前四阶协高阶矩有 3 860 个参数需要估计, 利用一个三因子模型可以将其简化为 96 个参数。目前, 根据资产定价方式不同, 主要存在三种类型的因子模型: 宏观因子模型、基本面因子模型和统计因子模型^[18]。但是, 协高阶矩建模的高度复杂性与高度非线性使得现有的大部分因子建模方法集中在参数化的静态建模。Martellini 和 Ziemann 将单因子模型拓展到了协高阶矩的估计, 进一步给出了基于单因子模型的协高阶矩压缩估计^[13]。在利用多因子模型估计协高阶矩方面, 目前有 Boudt 等基于可观测多因子模型和基于潜在因子模型讨论了静态协偏度和协峰度矩阵的估计, 不仅在一定程度上缓解了“维数灾难”的问题, 而且证明了样本外投资组合的优良性质^[14, 15]。但是, 多因子模型在协高阶矩估计的使用存在一个关键性的问题—因子个数选择。Bailey 等的研究表明, 在现有的 146 个可观测因子中, 市场因子(market factor) 是唯一的强因子, 而其他因子均为弱因子, 这些弱因子只对部分资产具有解释能力, 并且这种解释力随时间变化很大。因此, 将这些弱因子不加选择的纳入因子模型中可能会适得其反^[19]。杨冬等给出了一种静态混频高阶矩框架下的因子个数选择方法, 通过残差稀疏性检验选择正确的因子个数^[20]。从目前的研究来看, 鲜有学者讨论具有时变协高阶矩结构下的因子个数选问题, 这限制了多因子模型在时变协高阶矩上的应用。事实上, 基于因子模型的时变协高阶矩建模也鲜有学者提及, 其难点主要集中在条件协高阶矩的分解和时变结构的估计, 这也使得基于因子模型的时变结构建模集中在协方差矩阵上^[21-23]。

对于多元金融资产收益的时变协高阶矩建模, 多数文献将其转化为多个具有相关结构的单变量高阶矩时变模型进行建模。主流的单变量时

变高阶矩模型有两种:第一种是 Hansen 提出的自回归条件密度(ARCD)模型,该模型中驱动高阶矩参数具有 GARCH 模型的动态结构,利用极大似然估计方法,估计出形状参数时变方程中的参数从而得到时变的形状参数,因此资产收益率的高阶矩也是动态的^[24];第二种是 León 等提出的 GARCHSK 模型,它对金融资产收益率的波动率,偏度和峰度的时变结构直接建模,同样赋予它们一种 GARCH 结构,但是 GARCHSK 模型假设金融收益率的分布函数为正态分布 Gram-Charlier (GC) 级数展开,因此它是一种基于时变高阶矩的近似模型^[25]。上述两种单变量模型各有优劣,GARCHSK 模型无需指定分布从而更加稳健,ARCD 模型则有渐进理论支撑其有效性。两种模型都被广泛应用到时变协高阶矩建模中。例如,Jondeau 和 Rockinger 将协高阶矩的动态结构分解为不同资产收益率之间相关性的动态结构和单个资产收益率高阶矩的动态结构。他们的研究将动态条件相关(DCC)模型与 ARCD 模型相结合,是 DCC 模型在协高阶矩上的扩展^[16]。Ghalanos 等通过独立成分分析(ICA)将金融资产收益率转化为潜在独立因素,然后估计各独立因素边际密度的高阶矩时变参数,进而估计这些独立因素的高阶矩的动态结构^[17]。他们的研究是广义正交 GARCH(GO-GARCH)模型在协高阶矩上的扩展,利用 ICA 与数个单变量 ARCD 模型相结合对多元金融资产收益率的协高阶矩的动态结构建模,称之为 GO-ARCD 模型。蒋翠侠等则以 ICA 的思路拓展了 GARCHSK 模型,提出了独立成分 GARCHSK(ICASK)模型,并将其应用到动态投资组合分析中^[9]。目前对于时变协高阶矩建模的相关文献仍然匮乏,并且存在以下几个问题:首先,绝大多数文献都采用 ICA 或 DCC 的降维方式将时变协高阶矩建模转化为数个独立潜在序列的时变高阶矩建模,当投资组合维数 N 较高时,上述文献仍然不能解决“维数灾难”的问题,ICA 和 DCC 降维方式的待估参数个数都是以 $O(N^2)$ 增加,当资产维数较高时模型仍然难以估计;其次,由于部分金融资产收益率极端倾斜厚尾(例如偏度绝对值大于 1,峰度大于 20)的特点,利用现有的已知分布(例如偏斜学生 t 分布或偏斜广义误差分布)已无法对其高阶矩进行拟合,因此

可能存在严重的模型误设,进而导致估计量不稳健。

综上所述,可以总结出本文的创新点如下:第一,通过因子模型的降维手段更好地捕捉了多元资产收益率的潜在结构,解决了现有时变协高阶矩建模仍无法解决的“维数灾难”问题,使动态高阶矩投资组合能够应用于高维场景。第二,为减少时变高阶矩建模可能产生的分布误设,引入一种半参数分布对时变高阶矩建模,增加了模型的稳健性和适用性;同时,通过对因子和各资产的异质性成分进行时变高阶矩建模,而非资产收益率本身,前者拥有更温和的偏度和峰度,保证了模型的可估计性。第三,将静态因子协高阶矩估计拓展到时变协高阶矩的估计中,丰富了因子模型相关理论研究。

2 半参数分布时变因子模型及其估计

2.1 模型形式

本研究考虑的半参数分布时变因子(SF-TVSNP)模型如下

$$\begin{cases} r_{it} = u_i + \beta_i f_t + \varepsilon_{it} \\ f_t = \mu_t + \sigma_t z_t, z_t | I_{t-1} \sim \text{SNP}(0, 1, \theta_t) \\ \varepsilon_{it} = h_{it} \epsilon_{it}, \epsilon_{it} | I_{t-1} \sim \text{SNP}(0, 1, \eta_{it}) \end{cases} \quad (1)$$

其中 r_{it} 为资产 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 在 t ($t = 1, 2, \dots, T$) 时刻的收益率; f_t 为可观测的市场因子, β_i 为因子在资产 i 上的载荷, ε_{it} 为资产 i 在 t 时刻异质性成分; $\mu_t = E[f_t | I_{t-1}]$ 和 $\sigma_t^2 = E[(f_t - \mu_t)^2 | I_{t-1}]$ 分别为因子在 t 时刻的条件均值与条件方差, I_{t-1} 为 $t-1$ 时刻的信息集, z_t 为标准化后的因子,其在 I_{t-1} 的条件分布为均值为 0 方差为 1 的半参数(semi-nonparametric, SNP)分布,参数向量 $\theta_t = [\theta_{1t}, \theta_{2t}]$ 控制半参数分布的形状;类似的, $h_{it}^2 = E[\varepsilon_{it}^2 | I_{t-1}]$ 为异质性成分 i 在 t 时刻的条件方差, $\eta_{it} = [\eta_{1it}, \eta_{2it}]$ 为半参数分布的形状参数。进一步,为了使因子模型具有可行性,需要假设 $E[\varepsilon_{it} | I_{t-1}] = 0$ 且 ε_{it} 与 ε_{jt} ($i \neq j$) 相互独立, ε_{it} 与 f_t 相互独立。基于上述假定,可以得到 r_{it} 的条件均值 $m_{it} = E[r_{it} | I_{t-1}] = u_i + \beta_i \mu_t$ 。模型的向量表达如下

$$\begin{cases} r_t = \mathbf{u} + \mathbf{B}f_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ f_t = \boldsymbol{\mu}_t + \sigma_t z_t, z_t | I_{t-1} \sim \text{SNP}(0, 1, \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{h}_t \circ \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t | I_{t-1} \sim \text{SNP}(0, 1, \boldsymbol{\eta}_t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $r_t = [r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{Nt}]^T$, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]^T$, $\mathbf{B} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Nt}]^T$ 均为 $N \times 1$ 的向量; \mathbf{h}_t 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 分别为条件标准差与标准化异质性成分的向量表达 “ \circ ” 表示 Hadamard 内积.

2.2 半参数分布及其条件高阶矩

本研究采用 León 和 Níguez^[26] 所介绍的时变半参数分布 (TVSNP) 来刻画因子以及异质性成分的条件分布结构. 为保证模型在高维数据下的可行性, 本研究参考 León 和 Níguez^[27] 的构建方法对 TVSNP 分布进行简化, 约束 SNP 分布中一阶、二阶 Hermite 多项式系数为 0, 将构建分布所需参数减少至两个, 缓解了时变方程需要估计的参数个数, 有利于高维情形的应用, 这种特殊的 SNP 分布也称为 Transformed Gram-Charlier (TGC) 分布, 为体现半参数分布特性, 本文统一称为 SNP 分布.

由于 z_t 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 都服从标准化后的 TVSNP 分布, 为方便起见, 先从一般形式的 TVSNP 分布进行介绍, 记 TVSNP 分布的概率密度函数为

$$q(x_t, \boldsymbol{\theta}_t) = \lambda_t \varphi(x_t) \psi^2(x_t, \boldsymbol{\theta}_t) \quad (3)$$

其中 $x_t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta}_t = [\theta_{1t}, \theta_{2t}]^T$ 为参数向量, $\varphi(\cdot)$ 为标准正态分布密度函数, $\psi(\cdot)$ 定义如下

$$\psi(x_t, \boldsymbol{\theta}_t) = 1 + \frac{\theta_{1t}}{\sqrt{3!}} H_3(x_t) + \frac{\theta_{2t}}{\sqrt{4!}} H_4(x_t) \quad (4)$$

$H_k(x)$ 表示标准化的 Hermite 多项式, λ_t 的作用是为了保证概率密度积分为 1, 满足 $\lambda_t^{-1} = 1 + \gamma_{1t}^2 + \gamma_{2t}^2$, $\gamma_{1t} = \frac{\theta_{1t}}{\sqrt{3!}}$ 和 $\gamma_{2t} = \frac{\theta_{2t}}{\sqrt{4!}}$. 其前四阶条件原点矩分别为

$$\begin{aligned} E_q[x_t | I_{t-1}] &= 4\lambda_t \gamma_{1t} \gamma_{2t} \\ E_q[x_t^2 | I_{t-1}] &= 6\lambda_t \gamma_{1t}^2 + 8\lambda_t \gamma_{2t}^2 + 1 \\ E_q[x_t^3 | I_{t-1}] &= 2\sqrt{6}\lambda_t \gamma_{1t} + 48\gamma_{1t} \gamma_{2t} \\ E_q[x_t^4 | I_{t-1}] &= 4\sqrt{6}\lambda_t \gamma_{2t} + 72\lambda_t \gamma_{1t}^2 + 120\lambda_t \gamma_{2t}^2 + 3 \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 标准化的 TVSNP 随机变量可以定义为 $z_t = a(\boldsymbol{\theta}_t) + b(\boldsymbol{\theta}_t) x_t$, 其中

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\theta}_t) &= -b(\boldsymbol{\theta}_t) E_q[x_t | I_{t-1}] \\ b(\boldsymbol{\theta}_t) &= 1 / \sqrt{E_q[x_t^2 | I_{t-1}] - (E_q[x_t | I_{t-1}])^2} \end{aligned} \quad (6)$$

进一步, z_t 的条件概率密度函数可以表示为 $\frac{1}{b(\boldsymbol{\theta}_t)} q\left(\frac{z_t - a(\boldsymbol{\theta}_t)}{b(\boldsymbol{\theta}_t)} | I_{t-1}\right)$, 其条件偏度与条件超额峰度分别为

$$\begin{aligned} s_{z_t} &= E_q[(a_t + b_t x_t)^3 | I_{t-1}] \\ &= a_t^3 + 3a_t^2 b_t E_q[x_t | I_{t-1}] + 3a_t b_t^2 E_q[x_t^2 | I_{t-1}] + b_t^3 E_q[x_t^3 | I_{t-1}] e k_{z_t} \\ &= E_q[(a_t + b_t x_t)^3 | I_{t-1}] - 3 \\ &= a_t^4 + 4a_t^3 b_t E_q[x_t | I_{t-1}] + 6a_t^2 b_t^2 E_q[x_t^2 | I_{t-1}] + 4a_t b_t^3 E_q[x_t^3 | I_{t-1}] + b_t^4 E_q[x_t^4 | I_{t-1}] - 3 \end{aligned} \quad (7)$$

类似的, 本研究定义常数半参数分布 (CSNP) 作为 TVSNP 的嵌套模型, CSNP 的形状参数 $\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_0$ 为常数, 这表明分布不存在时变高阶矩. 需要注意的是 CSNP 模型可以存在条件异方差结构, 因为方差由 σ_t^2 (或 h_t^2) 控制.

2.3 时变结构方程的设定

本研究需要对因子的条件均值 $\mu_t(\boldsymbol{\varphi})$, 条件方差 $\sigma_t(\boldsymbol{\varphi})$, 以及形状参数 $\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\vartheta})$ 的时变结构进行设定, 其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为驱动因子条件均值 μ_t 与条件方差 σ_t 的时变结构参数, $\boldsymbol{\vartheta}$ 为驱动因子形状参数 $\boldsymbol{\theta}_t$ 的时变结构参数. 类似的, 对于每一个异质性成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 则需要对其条件方差 $h_t(\boldsymbol{v}_t)$ 以及形状参数 $\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\zeta}_t)$ 的时变结构进行设定, 其中 \boldsymbol{v}_t 与 $\boldsymbol{\zeta}_t$ 分别为驱动 h_t 和 $\boldsymbol{\eta}_t$ 的时变结构参数. 对于因子的时变结构设定如下

$$\begin{aligned} \mu_t &= \rho_0 + \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 f_{t-1} \\ \sigma_t^2 &= \omega_0 + \omega_1 \sigma_{t-1}^2 + \omega_2 z_{t-1}^2 \\ \theta_{dt} &= \delta_{d0} + \delta_{d1} \theta_{dt-1} + \delta_{d2}^+ \max(z_{t-1}, 0) + \delta_{d2}^- \min(z_{t-1}, 0) \quad (d = 1, 2) \end{aligned} \quad (8)$$

需要注意的是形状参数 $\boldsymbol{\theta}_t(\boldsymbol{\vartheta})$ 的时变结构具有一个分段结构, 由于其良好表现, 这种设定被广泛应用在高阶矩的时变参数设定中^[26-28]. 上述设定使得因子的时变结构满足一个 ARMA(1, 1)-GARCH(1, 1)-TVSNP(1, 1) 模型, 其中 $\boldsymbol{\varphi} = [\rho_0, \rho_1, \rho_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2]^T$ 和 $\boldsymbol{\vartheta} = [\delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}^+, \delta_{12}^-, \delta_{20}, \delta_{21}, \delta_{22}^+, \delta_{22}^-]^T$ 为因子时变结构的参数向量. 同样的, 对于异质性成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, 本文设定

$$\begin{aligned}
 h_{it}^2 &= \omega_{i0} + \omega_{i1} h_{it-1}^2 + \omega_{i2} \epsilon_{it-1}^2 \\
 \eta_{dit} &= \tau_{d,i0} + \tau_{d,i1} \eta_{dit-1} + \\
 &\quad \tau_{d,i2}^+ \max(\epsilon_{it-1}, 0) + \\
 &\quad \tau_{d,i2}^- \min(\epsilon_{it-1}, 0) \quad (d = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

上述设定满足一个 GARCH(1,1)-TVSNP(1,1) 模型, 其中 $v_i = [\omega_{i0}, \omega_{i1}, \omega_{i2}]^T$ 和 $\zeta_i = [\tau_{1,i0}, \tau_{1,i1}, \tau_{1,i2}^+, \tau_{1,i2}^-, \tau_{2,i0}, \tau_{2,i1}, \tau_{2,i2}^+, \tau_{2,i2}^-]^T$ 为异质性成分 ϵ_{it} 时变结构的参数向量。

2.4 因子载荷的估计

由于异质性成分之间相互独立, 因子载荷矩阵 B 的估计可以由 N 个 OLS 回归一致估计, 具体来说, 对于资产 i 有

$$(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i) = \operatorname{argmin}_{\alpha, \beta} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \alpha_i - \beta_i f_{it})^2 \tag{10}$$

对于回归残差有 $\hat{\epsilon}_{it} = r_{it} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i f_{it}$, 为异质性成分的一致估计。目前有部分文献考虑到了因子载荷的时变特征, 即 $B = B_t$ 。这种时变因子载荷模型具有更灵活的特点, 能够捕捉到更多的时变特征。需要注意, 因子载荷通常被视为模型参数, 其时变结构建模与本文讨论的因子时变结构建模不同, 现有方法如状态空间模型^[21]、非参数方法^[22]、机器学习方法^[23], 但是上述方法均集中在均值-方差框架下, 如何应用到动态高阶矩建模中仍有待研究。

2.5 因子时变结构的估计

对于因子的时变参数可以通过极大似然估计完成。但是, 由于高阶矩时变结构的高度非线性化, 直接同时估计均值、方差、高阶矩方程较为困难。许多学者建议在参数估计过程中可以按照“简单到复杂”的原则来进行多阶段的估计, 即先估计均值-方差方程中的参数, 然后再将其得到的结果作为高阶矩方程的初始值^[26, 27, 29-31]。本研究参照 León 和 Níguez^[26, 27], 王鹏^[29] 采用的两阶段估计对因子的时变结构进行估计。具体来说, 由式(1)和式(3)可知因子的条件概率密度函数为

$$p(f_{it} | I_{t-1}) = \frac{1}{b_i \sigma_i} q\left(\frac{z_i - a_i}{b_i} | I_{t-1}\right) \tag{11}$$

其中 $a_i = a(\theta_i(\vartheta))$ 和 $b_i = b(\theta_i(\vartheta))$ 的定义在 2.2 节给出, $\theta_i(\vartheta) = [\theta_{i1}(\vartheta), \theta_{i2}(\vartheta)]^T$ 为 I_{t-1} 可测的参数向量, ϑ 为 θ_i 时变结构方程中的待估参数。于是 TVSNP 模型的样本对数似然函数为

$$\begin{aligned}
 \ln L(\varphi, \vartheta) &= \sum_{t=1}^T l_t(\varphi, \vartheta) \\
 l_t(\varphi, \vartheta) &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \lambda(\theta_t) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{z_t(\varphi) - a(\theta_t)}{b(\theta_t)}\right)^2 + \\
 &\quad \ln \left[\psi \left(\frac{z_t(\varphi) - a(\theta_t)}{b(\theta_t)} \right) \right]^2 - \\
 &\quad \ln \sigma_t(\varphi) - \ln b(\theta_t)
 \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $z_t(\varphi) = \frac{f_{it} - \mu_i(\varphi)}{\sigma_i(\varphi)}$, φ 为条件均值-方差方程中的待估参数。首先本研究采用 QMLE 对条件均值方差方程的参数向量 φ 进行估计, 得到参数估计值 $\hat{\varphi}$ 与残差 $\hat{z}_t(\hat{\varphi})$, 然后将其带入似然函数(12)中得到 ϑ 的估计。同样的, 常数半参数分布模型(CSNP)的似然函数如下

$$\begin{aligned}
 \ln L(\theta_0) &= \sum_{t=1}^T l_t(\theta_0) \\
 l_t(\theta_0) &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \lambda(\theta_0) - \ln b(\theta_0) - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{z_t(\varphi) - a(\theta_0)}{b(\theta_0)}\right)^2 + \\
 &\quad \ln \left[\psi \left(\frac{z_t(\varphi) - a(\theta_0)}{b(\theta_0)} \right) \right]^2 - \\
 &\quad \ln \sigma_t(\varphi)
 \end{aligned} \tag{13}$$

类似的采用两步估计法, 可以估计出形状参数 $\hat{\theta}_0 = [\hat{\theta}_{10}, \hat{\theta}_{20}]^T$ 。

2.6 异质性成分时变结构的估计

由于异质性成分的时变结构设定与因子类似, 可以参考 2.5 节的估计方法对 N 个异质性成分的时变参数进行估计, 需要注意的是, 异质性成分不包含时变的均值结构且基于估计的异质性成分, 其似然函数如下

$$\begin{aligned}
 \ln \tilde{L}_i(v_i, \zeta_i) &= \sum_{t=1}^T \tilde{l}_{it}(v_i, \zeta_i) \\
 \tilde{l}_{it}(v_i, \zeta_i) &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \lambda(\eta_{it}) - \\
 &\quad \ln b(\eta_{it}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\epsilon}_{it}(v_i)}{b(\eta_{it})}\right)^2 + \\
 &\quad \ln \left[\psi \left(\frac{\hat{\epsilon}_{it}(v_i)}{b(\eta_{it})} \right) \right]^2 - \ln h_{it}(v_i)
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\hat{\epsilon}_{it}(\mathbf{v}_i) = \frac{r_{it} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i f_i}{h_{it}(\mathbf{v}_i)}$ 为标准化后的异质性成分估计值. 记真实异质性成分 $\epsilon_{it}(\mathbf{v}_i) = \frac{\epsilon_{it}}{h_{it}(\mathbf{v}_i)}$ 的对数似然函数为 $\ln L_i(\mathbf{v}_i, \zeta_i)$. 在一些温和^②的假设条件下,可以得到

- 1) 随样本长度 $T \rightarrow \infty$,

$$\sup_{1 \leq i \leq T} \max_{1 \leq j \leq N} |\hat{\epsilon}_{it} - \epsilon_{it}| \rightarrow 0 \text{ a. s. ;}$$
- 2) 随样本长度 $T \rightarrow \infty$,

$$\sup_{1 \leq i \leq N} \sup_{\mathbf{v}_i \in \Lambda, \zeta_i \in \Omega} |\ln \tilde{L}_i(\mathbf{v}_i, \zeta_i) - \ln L_i(\mathbf{v}_i, \zeta_i)| \rightarrow 0 \text{ a. s.}$$

上述结论保证了 $\ln \tilde{L}_i(\mathbf{v}_i, \zeta_i)$ 与 $\ln L_i(\mathbf{v}_i, \zeta_i)$ 所估计参数具有一致性,具体的假设与证明过程可以参考 Guo 等^[22]对于类似结论的证明.

3 时变协高阶矩的估计与识别

基于第2节对于 SF-TVSNP 模型参数的估计,本节给出资产收益率的时变协高阶矩的估计方法.

3.1 时变协高阶矩表示及其分解

参考 Jondeau 和 Rockinger^[28]引入的高阶矩张量记法,将资产收益率的条件协方差矩阵,条件协偏度矩阵,条件协峰度矩阵中的元素定义如下

$$\begin{aligned} \sigma_{ijt} &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt}) | I_{t-1}] \\ s_{ijk t} &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt})(r_{kt} - m_{kt}) | I_{t-1}] \\ k_{ijkl t} &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt})(r_{kt} - m_{kt})(r_{lt} - m_{lt}) | I_{t-1}] \end{aligned} \quad (15)$$

因此,它们的矩阵表达式为

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= E [(r_t - m_t)(r_t - m_t)^T | I_{t-1}] \\ &= \{\sigma_{ijt}\}_{N \times N} \\ S_t &= E [(r_t - m_t)(r_t - m_t)^T \otimes (r_t - m_t)^T | I_{t-1}] \\ &= \{s_{ijk t}\}_{N \times N^2} \\ K_t &= E [(r_t - m_t)(r_t - m_t)^T \otimes (r_t - m_t)^T \otimes (r_t - m_t)^T | I_{t-1}] \\ &= \{k_{ijkl t}\}_{N \times N^3} \end{aligned} \quad (16)$$

进一步,定义协超额峰度矩阵 EK_t ,其中的元素为

$$ek_{ijkl t} = k_{ijkl t} - \sigma_{ijt} \sigma_{kl t} - \sigma_{ik t} \sigma_{jl t} - \sigma_{il t} \sigma_{jk t} \quad (17)$$

其矩阵表达为 $EK_t = \{ek_{ijkl t}\}_{N \times N^3}$. 接下来考虑对条件协方差矩阵,条件协偏度矩阵,条件协峰度矩阵进行分解,以协方差矩阵为例,由式(15)有

$$\begin{aligned} \sigma_{ijt} &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt}) | I_{t-1}] \\ &= E [(\beta_i \sigma_t z_t + \epsilon_{it})(\beta_j \sigma_t z_t + \epsilon_{jt}) | I_{t-1}] \\ &= E [\beta_i \beta_j \sigma_t^2 z_t^2 | I_{t-1}] + \\ &\quad E [\beta_i \sigma_t z_t \epsilon_{jt} | I_{t-1}] + E [\beta_j \sigma_t z_t \epsilon_{it} | I_{t-1}] + \\ &\quad E [\epsilon_{it} \epsilon_{jt} | I_{t-1}] \\ &= \beta_i \beta_j \sigma_t^2 + E [\epsilon_{it} \epsilon_{jt} | I_{t-1}] \\ &= \begin{cases} \beta_i^2 \sigma_t^2 + h_{it}^2 & (i=j) \\ \beta_i \beta_j \sigma_t^2 & (others) \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

同理对条件协偏度矩阵分解有

$$\begin{aligned} s_{ijk t} &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt})(r_{kt} - m_{kt}) | I_{t-1}] \\ &= E [(\beta_i \sigma_t z_t + \epsilon_{it})(\beta_j \sigma_t z_t + \epsilon_{jt}) \times \\ &\quad (\beta_k \sigma_t z_t + \epsilon_{kt}) | I_{t-1}] \\ &= \beta_i \beta_j \beta_k \sigma_t^3 s_{z_t} + E [\epsilon_{it} \epsilon_{jt} \epsilon_{kt} | I_{t-1}] \\ &= \begin{cases} \beta_i^3 \sigma_t^3 s_{z_t} + h_{it}^3 s_{\epsilon_{it}} & (i=j=k) \\ \beta_i \beta_j \beta_k \sigma_t^3 s_{z_t} & (others) \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $s_{z_t} = E [z_t^3 | I_{t-1}]$ 和 $s_{\epsilon_{it}} = E [\epsilon_{it}^3 | I_{t-1}]$ 分别为 z_t 和 ϵ_{it} 的条件偏度. 协峰度矩阵较为特殊,直接对协峰度矩阵分解的结果较为复杂,会产生一项因子与异质性成分的交叉项,具体可以参考 Martellini 和 Ziemann^[13], Boudt 等^[14, 15]的分解公式. 为解决这个问题,本文选择对条件协超额峰度矩阵 EK_t 进行分解,结果如下

$$\begin{aligned} ek_{ijkl t} &= k_{ijkl t} - \sigma_{ijt} \sigma_{kl t} - \sigma_{ik t} \sigma_{jl t} - \sigma_{il t} \sigma_{jk t} \\ &= E [(r_{it} - m_{it})(r_{jt} - m_{jt})(r_{kt} - m_{kt})(r_{lt} - m_{lt}) | I_{t-1}] - \\ &\quad \sigma_{ijt} \sigma_{kl t} - \sigma_{ik t} \sigma_{jl t} - \sigma_{il t} \sigma_{jk t} \\ &= \beta_i \beta_j \beta_k \beta_l \sigma_t^4 (k_{z_t} - 3) + E [\epsilon_{it} \epsilon_{jt} \epsilon_{kt} \epsilon_{lt} | I_{t-1}] - \\ &\quad E [\epsilon_{it} \epsilon_{jt} | I_{t-1}] E [\epsilon_{kt} \epsilon_{lt} | I_{t-1}] - E [\epsilon_{it} \epsilon_{kt} | I_{t-1}] \\ &\quad E [\epsilon_{jt} \epsilon_{lt} | I_{t-1}] - E [\epsilon_{it} \epsilon_{lt} | I_{t-1}] E [\epsilon_{jt} \epsilon_{kt} | I_{t-1}] \\ &= \begin{cases} \beta_i^4 \sigma_t^4 ek_{z_t} + h_{it}^4 ek_{\epsilon_{it}} & (i=j=k=l) \\ \beta_i \beta_j \beta_k \beta_l \sigma_t^4 ek_{z_t} & (others) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $ek_{z_t} = E [z_t^4 | I_{t-1}] - 3$ 和 $ek_{\epsilon_{it}} = E [\epsilon_{it}^4 | I_{t-1}] - 3$ 分别为 z_t 和 ϵ_{it} 的条件超额峰度. 通过上述分解,将资产收益率的时变协高阶矩分解为因子的时变高阶矩与异质性成分的时变高阶矩,同时异质性成

② 假设包括 $\{\epsilon_{it}\}_{t=1}^T$ 序列平稳且 8 阶矩存在; 条件方差 $h_{it}(\mathbf{v}_i)$ 与新息项 ϵ_{it} 独立.

分的时变高阶矩具有稀疏性的特点. 为表示简便, 上述分解的矩阵表达如下

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \sigma_t^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^T + \Omega_t \\ S_t &= \sigma_t^3 s_{z,t} \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^T) + \Gamma_t \\ EK_t &= \sigma_t^4 ek_{z,t} \mathbf{B}(\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^T) + \Psi_t \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\{\Omega_t\}_{ii} = h_{it}^2$, $\{\Gamma_t\}_{iii} = h_{it}^3 s_{\epsilon_{it}}$, $\{\Psi_t\}_{iiii} = h_{it}^4 ek_{\epsilon_{it}}$ 分别为异质性成分的条件协方差, 条件协偏度, 条件协超额峰度矩阵. 进一步通过式(17), 金融资产收益率的条件协峰度矩阵可以表示为

$$\{K_t\}_{ijkl} = \{EK_t\}_{ijkl} + \sigma_{ij,t} \sigma_{kl,t} + \sigma_{ik,t} \sigma_{jl,t} + \sigma_{il,t} \sigma_{jk,t} \quad (22)$$

3.2 条件协高阶矩的估计

通过 2.4 节 ~ 2.6 节分别对于因子载荷、因子时变结构以及异质性成分时变结构的估计, 结合式(21) 对于时变协高阶矩的分解, 可以得到金融资产收益率的条件协高阶矩如下

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_t &= \hat{\sigma}_t^2 \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}^T + \hat{\Omega}_t \\ \hat{S}_t &= \hat{\sigma}_t^3 \hat{s}_{z,t} \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{B}}^T \otimes \hat{\mathbf{B}}^T) + \hat{\Gamma}_t \\ \hat{EK}_t &= \hat{\sigma}_t^4 \hat{ek}_{z,t} \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{B}}^T \otimes \hat{\mathbf{B}}^T \otimes \hat{\mathbf{B}}^T) + \hat{\Psi}_t \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\hat{\sigma}_t^2 = \sigma_t^2(\hat{\varphi})$, $\hat{\mathbf{B}}$ 为 OLS 回归系数; $\hat{s}_{z,t}$ 与 $\hat{ek}_{z,t}$ 由 (7) 式得到, 其中 $\hat{\lambda}_t = \lambda(\theta_t(\hat{\vartheta}))$, $\hat{\mu}_t = a(\theta_t(\hat{\vartheta}))$, $\hat{b}_t = b(\theta_t(\hat{\vartheta}))$, $\hat{\gamma}_t = \gamma(\theta_t(\hat{\vartheta}))$; $\hat{\Omega}_t$, $\hat{\Gamma}_t$ 和 $\hat{\Psi}_t$ 分别为异质性成分的条件协方差, 协偏度, 协超额峰度矩阵的估计值, 可以通过类比因子动态高阶矩得到. 进一步, 通过式(22) 可以得到金融资产收益率的条件协峰度矩阵估计为

$$\{\hat{K}_t\}_{ijkl} = \{\hat{EK}_t\}_{ijkl} + \hat{\sigma}_{ij,t} \hat{\sigma}_{kl,t} + \hat{\sigma}_{ik,t} \hat{\sigma}_{jl,t} + \hat{\sigma}_{il,t} \hat{\sigma}_{jk,t} \quad (24)$$

3.3 时变高阶矩的识别检验

建立时变高阶矩模型的首要前提是对应序列分布的偏度和峰度具有时变特征, 即序列存在类似于条件异方差性的条件异偏度和条件异峰度特征. 现有文献中涉及检验资产收益率序列是否存在异偏度和异峰度特征的研究主要集中在两种框架: 第一类方法是先估计某种时变高阶矩模型(如 GARCHSK 模型和 ARCD 模型), 再通过检验与时变偏度和时变峰度对应的时变系数的显著性来判断资产收益率序列是否存在异偏度和异峰度特征, 这其中常用的检验有瓦尔德(Wald) 检验和似然比(LR) 检验^[26, 32]; 第二类方法是对资产收

益率序列拟合 GARCH 模型后得到的残差或者标准化残差来进行回归检验, 例如 Jondeau 和 Rockinger^[28] 类比 ARCH 效应检验对标准化残差的三次方和四次方序列对其滞后项构造 LM 统计量进行检验, 贾婧等^[33] 则通过概率积分变换改进了 Jondeau 和 Rockinger 的 LM 统计量, 取得了更高的功效.

SF-TVSNP 模型需要分别对因子与异质性成分进行时变高阶矩识别检验, 参考 Vuong^[34] 和 León 和 Níguez^[26] 的方法, 本研究通过构建似然比检验对时变高阶矩进行识别. 具体来说, 似然比检验通过比较 TVSNP 模型与嵌套的 CSNP 模型的对数似然函数值进行检验, 对于因子的时变高阶矩检验有如下结论

$$LR_f = \frac{T^{-\frac{1}{2}} [\ln L(\hat{\varphi}, \hat{\vartheta}) - \ln L(\hat{\theta}_0)]}{\hat{w}_T} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$\hat{w}_T^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{l_t^{TV}}{l_t^C} \right) \right]^2 - \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{l_t^{TV}}{l_t^C} \right) \right]^2 \quad (25)$$

其中 $l_t^{TV} = l_t(\hat{\varphi}, \hat{\vartheta})$, $l_t^C = l_t(\hat{\theta}_0)$, \hat{w}_T 为似然函数比的样本标准差. 类似的, 对于异质性成分有

$$LR_{\epsilon_i} = \frac{T^{-\frac{1}{2}} [\ln \tilde{L}_i(\hat{v}_i, \hat{\zeta}_i) - \ln \tilde{L}_i(\hat{\eta}_{0i})]}{\hat{w}_{\epsilon_i T}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$\hat{w}_{\epsilon_i T}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^{TV}}{\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^C} \right) \right]^2 - \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^{TV}}{\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^C} \right) \right]^2 \quad (26)$$

其中 $\hat{\eta}_{0i}$ 为 CSNP 模型的形状参数估计值, $\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^{TV}$ 和 $\tilde{l}_{\epsilon_{it}}^C$ 分别为 t 时刻异质性成分在 TVSNP 模型和 CSNP 模型下的似然函数值, 其形式可以参考式(14). 基于式(25) 和式(26) 所给出的渐进分布, 可以进行对应的似然比检验.

3.4 维数灾难

由于时变高阶矩建模面临着严重的“维数灾难”问题, 如何将时变高阶矩投资组合应用到高维场景成为一大难题. 时变高阶矩建模的“维数灾难”问题主要体现在“估计不准”与“实现困难”上. “估计不准”是指待估参数过多导致估计量自由度小、方差大. “实现困难”是指大量参数估计需要占用大量内存与时间, 尤其高阶矩参数估计具有高度非线性特点, 进一步增加了估计难度.

本研究给出的 SF-TVSNP 模型的待估参数个数满足 $\mathcal{G}_{SF}(N) = 15N + 14$, 在相同的时变结构设定下 ICASK 模型的待估参数个数为 $\mathcal{G}_{ICA}(N) = N^2 + 14N$. 可以明显看出 ICASK 模型的待估参数呈 N^2 次幂上升 而 SF-TVSNP 模型呈线性上升 当 N 较大时 SF-TVSNP 模型的估计难度将远小于 ICASK 模型. 另外 若异质性成分不存在时变高阶矩特征 SF-TVSNP 模型所需参数减少为 $\mathcal{G}_{SF}(N) = 9N + 14$, 同时只需要估计因子的时变高阶矩参数 进一步增加模型的可估计性.

4 模拟研究

本节通过构建蒙特卡洛模拟对 SF-TVSNP 模型的有限样本性质进行验证 主要集中在 SF-TVSNP 模型的稳健性. SF-TVSNP 模型使用时变半参数分布 (TVSNP) 对因子与异质性成分的高阶矩时变结构建模 放松了对分布的假定 与之对应的是需要给定分布的自回归条件密度 (ARCD) 模型. Ghalanos 等采用偏学生 t (SST) 分布与偏广义误差 (SGE) 分布进行 ARCD 建模 进而估计金融资产收益率的条件高阶矩. 但是 由于真实数据的条件分布未知 错误的给定条件分布可能会导致严重的模型误设问题 进而导致估计结果不稳健. 本节将会比较 TVSNP 模型与给定分布的 ARCD 模型对于条件高阶矩的估计.

为使模拟更具真实性 本节的模拟数据通过真实数据参数校准的方法给出. 由于因子与异质性成分建模方法相同 限于篇幅本节只对因子的条件高阶矩进行模拟估计. 用于参数校准的数据为 2005 年 7 月 1 日至 2019 年 6 月 30 日的沪深 300 指数. 本节的模拟步骤如下.

步骤 1 给定条件分布 (SST 或 SGE) 与时变结构设定形式 如式 (8) 所示. 基于真实数据估计时变结构参数 φ 与 ϑ , 记估计量为 $\hat{\varphi}$ 与 $\hat{\vartheta}$.

步骤 2 基于时变结构参数 $\hat{\varphi}$ 与 $\hat{\vartheta}$, 给定条件分布下 生成样本长度为 $T + 1$ 的模拟数据.

步骤 3 使用 1 到 T 时刻的数据 分别基于 TVSNP 模型 SST-ARCD 模型与 SGE-ARCD 模型对数据进行拟合 并估计 $T + 1$ 时刻的条件方差与条件高阶矩 记为 $(\hat{\sigma}_{T+1}^2, \hat{s}_{z, T+1}, \hat{e}k_{z, T+1})$.

步骤 4 将各方法估计的条件矩与真实的条件矩 $(\sigma_{T+1}^2, s_{z, T+1}, ek_{z, T+1})$ 进行比较 计算均方根误差 (RMSE) .

表 1 汇报了 $T = 1\ 000$ 时 重复 500 次模拟后各方法 RMSE 的均值与标准差. 当真实分布分别为 SGE 与 SST 时 基于 SNP 分布的条件矩估计表现基本相同 受真实分布设定影响很小. 对于基于 SST 分布的 ARCD 模型 当真实分布为 SGE 时 在估计条件偏度与条件峰度存在较大偏误 同时条件峰度 RMSE 的标准差较大 估计量由于模型误设的原因非常不稳定. 另外 在所有方法中 基于 SNP 分布的 RMSE 拥有最小的标准差 进一步体现了其稳健性.

表 1 不同分布设定下条件矩估计量的 RMSE

Table 1 RMSE of conditional moments under different distribution specifications

真实分布	SGE			SST		
	SNP	SST	SGE	SNP	SST	SGE
条件方差	0.020 (0.025)	0.026 (0.025)	0.026 (0.080)	0.021 (0.031)	0.021 (0.030)	0.021 (0.040)
条件偏度	0.159 (0.251)	0.207 (0.287)	0.124 (0.543)	0.139 (0.177)	0.126 (0.233)	0.110 (0.202)
条件峰度	0.388 (1.563)	4.722 (45.664)	0.534 (1.926)	0.394 (1.330)	0.269 (2.894)	0.333 (1.542)

注: 表中数据为 500 次重复模拟 RMSE 的均值 括号中为 RMSE 的标准差.

5 实证分析

5.1 动态高阶矩投资组合

本研究考虑两种不同的间接法动态高阶矩投资组合: 期望效用 (expected utility, EU) 最大化和风险价值 (Value at Risk, VaR) 最小化. 下面将简要介绍这两种投资组合优化方法. 不妨记 $t + 1$ 时刻投资组合收益率为 $R_{t+1} = \mathbf{w}_{t+1}^T \mathbf{r}_{t+1}$ $\mathbf{w}_{t+1} = [w_{1, t+1} \dots w_{N, t+1}]^T$ 为 $t + 1$ 时刻的投资组合权重 那么 $t + 1$ 时刻投资组合的前四阶条件矩分别为

$$\begin{aligned}
 M_t [R_{t+1}] &= \mathbf{w}_{t+1}^T (\mathbf{u} + \mathbf{B} \boldsymbol{\mu}_{t+1}) \\
 V_t [R_{t+1}] &= \mathbf{w}_{t+1}^T \boldsymbol{\Sigma}_{t+1} \mathbf{w}_{t+1} \\
 S_t [R_{t+1}] &= \mathbf{w}_{t+1}^T \mathbf{S}_{t+1} (\mathbf{w}_{t+1} \otimes \mathbf{w}_{t+1}) \\
 K_t [R_{t+1}] &= \mathbf{w}_{t+1}^T \mathbf{K}_{t+1} (\mathbf{w}_{t+1} \otimes \mathbf{w}_{t+1} \otimes \mathbf{w}_{t+1})
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\mu_{t+1}, \Sigma_{t+1}, S_{t+1}, K_{t+1}$ 为资产收益率向量 r_{t+1} 的前四阶条件协高阶矩; α, β 为 SF-TVSNP 模型中的截距与因子载荷. 参考 Martellini 和 Ziemann^[13], Jondeau 和 Rockinger^[16] 对于常相对风险厌恶效用函数(constant relative risk aversion, CRRA) 的前四阶展开, 可以得到期望效用表达式为

$$EU_t(w_{t+1}) = -\frac{\gamma}{2} V_t[R_{t+1}] + \frac{\gamma(\gamma+1)}{6} S_t[R_{t+1}] - \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{24} K_t[R_{t+1}] \quad (28)$$

其中 γ 为常相对风险厌恶的测度参数, 通过最大化式(28), 可以得到 $t+1$ 时刻基于期望效用最大化的最优投资组合. 另外, 通过对 $t+1$ 时刻的条件 VaR 进行四阶 Cornish-Fisher 展开, 本研究可以得到修正 VaR 表达式为

$$VaR_t(w_{t+1}) = -\sqrt{V_t[R_{t+1}]} \left(g_\alpha + \frac{SS_{t+1}}{6}(g_\alpha^2 + 1) + \frac{SK_{t+1}}{24}(2g_\alpha^2 - 3g_\alpha) - \frac{SS_{t+1}^2}{36}(2g_\alpha^3 - 5g_\alpha) \right) \quad (29)$$

其中 g_α 为标准高斯分布的 α 下分位数, $SS_{t+1} = \frac{S_t[R_{t+1}]}{(V_t[R_{t+1}])^{\frac{3}{2}}}$ 和 $SK_{t+1} = \frac{K_t[R_{t+1}]}{(V_t[R_{t+1}])^2} - 3$ 分别为

标准化的条件偏度和条件超额峰度, 通过最小化式(29), 本文可以得到 $t+1$ 时刻基于修正风险价值最小化的最优投资组合权重.

5.2 数据与实证设计

为了保证本文中的研究具有代表性, 充分反映中国股票市场中可能存在的高阶矩特征, 本文对沪深 300 指数中成分股进行分析. 参照中证指数有限公司对于沪深 300 指数的编制表, 以 2018 年 5 月 31 日的成分股列表作为依据, 将 2005 年 7 月 1 日至 2019 年 6 月 30 日的上市股票日度收益率(样本长度为 3 403 日) 作为研究对象. 由于时间跨度大, 部分成分股上市较晚或已退市以及一部分成分股有长时间停牌, 本研究保留缺失值不超过 3 年, 共计 206 只成分股作为研究对象. 对于少量股票在样本初期并未上市的股票, 将会在其上市后被纳入投资组合中. 另外, 本研究选择沪深 300 指数作为市场因子的代理变量. 表 2 对因子与成分股进行了描述性统计, 由于成分股较多, 本研究展示了成分股对应统计量的分布特征. 从表 2 可以发现, 指数相较于成分股拥有更温和的偏度与峰度. 同时所有序列都平稳且具有非正态性, 这是金融资产收益率的典型特征.

表 2 收益率序列描述性统计

Table 2 Descriptive statistics of asset returns

统计量	均值	标准差	偏度	超额峰度	ADF 检验	JB 检验	
沪深 300	0.059	1.749	-0.413	3.533	-12.894	1 870.601	
成分股	Min	-0.042	1.593	-0.925	1.809	-15.933	471.799
	Q1	0.044	2.584	-0.282	3.359	-14.579	1 640.790
	Med	0.069	2.832	-0.114	4.056	-14.200	2 345.976
	Mean	0.068	2.809	-0.133	4.586	-14.142	3 542.170
	Q3	0.093	3.115	0.012	5.429	-13.710	4 269.680
Max	0.147	3.644	0.502	13.823	-12.075	27 268.709	

注: ADF 检验的 1% 水平下的临界值为 -4.53, JB 检验 1% 水平下的临界值为 5.99.

为减少样本选择偏误, 使结果更具一般性, 本文的实证设计参考了 Martellini 和 Ziemann^[13] 的投资组合研究. 具体来说, 本研究将 206 只沪深 300 成分股看作一篮子股票, 将 2010 年 1 月 1 日—2019 年 6 月 30 日作为样本外区间, 每一年从篮子中随机抽取资产个数 N 的投资组合, 因此, 对于每一种资

产规模 N , 样本外区间中每一年的投资组合都不同. 基于此, 本研究完成整个样本外区间的回测, 进而通过分析 10 年样本外表现得到最终结果. 为保证有充足的数据对模型进行估计, 使用样本外区间前 5 年的日度数据来估计投资组合的时变协高阶矩, 并通过滚动窗口估计给出下一日的最优

投资组合权重,并将该投资组合持有一周.因此,本研究得到了10年共2 305日(464周)样本外投资组合.最后,通过5.1节介绍的高阶矩投资组合函数(EU)对样本外投资组合进行优化,对优化后的样本外收益率和投资权重进行分析.

为更好刻画SF-TVSNP模型对于“维数灾难”问题的解决,本文选择 $N = 10$ 与 $N = 100$ 分别代表低维与高维投资组合,目前动态高阶矩投资组合的资产规模集中在 $N < 15$ 上^[9,16,17],鲜有文献对于高维动态高阶矩投资组合进行实证研究.

5.3 因子与异质性成分的时变高阶矩估计

因子与异质性成分的时变高阶矩特征是SF-TVSNP模型的核心,在进行动态投资组合分析前,有必要对这两部分的估计结果进行分析.需要注意的是,在每一种资产规模下,本文随机抽取部分股票构建投资组合,而因子在整个实证分析中是唯一的.为了在有限篇幅下展示市场的时变高阶矩特征,本研究主要对因子的TVSNP模型估计结果进行分析,异质性成分的时变高阶矩特征则会通过时变性检验的方式呈现.

表3 沪深300指数TVSNP模型估计结果

Table 3 Estimated TVSNP coefficients of CSI300

ARMA-GARCH		TVSNP		CSNP	
ρ_0	0.001 ** (0.001)	δ_{10}	-0.074 ** (0.037)	θ_{01}	-0.064 *** (0.020)
ρ_1	-0.853 *** (0.071)	δ_{11}	-0.385 (0.239)	θ_{02}	0.503 *** (0.039)
ρ_2	0.876 *** (0.066)	δ_{12}^+	0.014 (0.033)		
ω_0	0.000 (0.000)	δ_{12}^-	0.077 *** (0.029)		
ω_1	0.945 *** (0.008)	δ_{20}	0.122 * (0.064)		
ω_2	0.054 *** (0.008)	δ_{21}	0.464 *** (0.148)		
		δ_{22}^+	0.361 *** (0.080)		
		δ_{22}^-	-0.074 (0.070)		
			$LL_{TV} = -1\ 570.044$	$LL_C = -1\ 590.159$	
$LR_f = 3.041 ***$					

注: *表示10%下显著, **表示5%下显著, ***表示1%下显著. LL_{TV} 和 LL_C 分别为TVSNP和CSNP的似然值, LR_f 为似然比检验统计量.

对于因子时变高阶矩特征的估计将采用全样本估计,即使用2005年7月1日至2019年6月30日共3 403日数据对TVSNP模型进行估计.参照第2节的估计方法与第4节的似然比检验,表3给出了沪深300指数TVSNP模型估计的结果. ARMA-GARCH列表示均值-方差方程的极大似

然估计值,TVSNP列为时变高阶矩参数估计值,CSNP列为内嵌静态半参数分布模型的形状参数估计值,括号中为对应系数的标准差.从表3可以看出,沪深300指数有显著的条件异方差结构与条件异高阶矩结构;时变高阶矩参数有明显的分段结构, δ_{12}^- 显著但 δ_{12}^+ 不显著表明 θ_{11} 对于负向冲

击具有杠杆效应,同样的, θ_{2i} 对于正向冲击具有杠杆效应.

进一步,基于 TVSNP 和 CSNP 的估计结果,图 1 给出了沪深 300 指数的条件高阶矩在样本内的变化趋势.可以很明显的观察到 TVSNP 模型捕捉到了指数在样本内的时变高阶矩特征,当股灾发生时,条件偏度和条件峰度出现了类似于波动率的聚集性,其中条件偏度为负向聚集. CSNP 模型则无法对高阶矩时变特征进行估计,比较两者结果可以直观感受到对高阶矩进行时变结构建模的优越性.

对于异质性成分的时变高阶矩分析主要通过假设检验进行,为使研究结果更具一般性,本研究对样本区间内 206 只成分股的异质性成分进行时变高阶矩检验,显著性水平 α 分别取 10%、5%、

1%. 由于该检验为多重检验(multiple test)问题,本文采用 Sidák 方法对显著性水平进行校正,即 $\alpha_{corr} = 1 - (1 - \alpha)^n$ 其中 $n = 206$ 为检验个数. 本文分别对各异质性成分的时变异方差性,常高阶矩性与时变高阶矩性进行检验:时变异方差检验通 ARCH 检验完成,常高阶矩检验通过对 η_{0i} 的 t 检验完成,时变高阶矩检验通过式(26)的似然比检验完成.

表 4 汇报了所有异质性成分中上述三种检验显著的频率,可以看到异质性成分的时变异方差性与常高阶矩性普遍存在,但高阶矩时变结构并不是普遍存在的,在 1% 显著性水平下,只有 1.46% 股票的异质性成分拒绝了原假设. 这意味着 SF-TVSNP 模型可以对异质性成分的时变结构进行简化,只需要对时变异方差与常高阶矩进行建模,本文将在下一节进行验证.

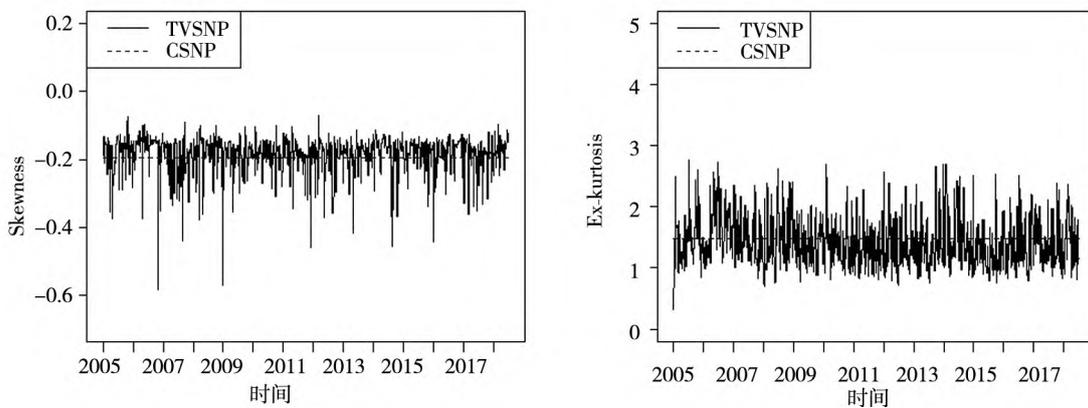


图 1 沪深 300 指数时变高阶矩特征
Fig.1 Time varying higher-order moments of CSI300

表 4 资产异质性成分假设检验频率统计

Table 4 Frequency summary of the LR statistics of the idiosyncratic errors

置信水平	$\alpha_{corr} = 0.1$	$\alpha_{corr} = 0.05$	$\alpha_{corr} = 0.01$
时变异方差检验	100.00%	100.00%	100.00%
常高阶矩检验	100.00%	100.00%	100.00%
时变高阶矩检验	4.85%	1.94%	1.46%

注: 表格中数值为 206 只成分股的异质性成分在各置信水平下拒绝原假设的频率.

5.4 动态投资组合分析

本节的投资组合分析遵循 5.2 节的实证设计. 通过 5.3 节的时变高阶矩特征分析,基于异质性成分时变高阶矩特征不是普遍存在的事实,本文考虑了异质性成分为常数半参数分布的 SF-ECSNP(sF-error constant SNP) 模型作为

SF-TVSNP 的嵌套模型. 为了充分体现 SF-TVSNP 模型在动态投资组合的经济价值,本文从纵横两个方向选取现有模型进行比较. 从纵向看, SF-TVSNP 模型可以看作 Martellini 和 Ziemann^[13] 提出的静态单因子(SF) 协高阶矩估计在动态结构上的改进,因此 SF 估计可以作为纵向比较的

槛(Benchmark)模型;从横向看,SF-TVSNP模型需要与其他时变协高阶矩模型比较优劣,本研究选取了指数加权移动平均(EWMA)模型^③,以及ICASK模型^[9]作为横向比较的门槛模型.同时,本研究同样考虑均值-方差投资组合(MV)作为门槛模型.协方差矩阵由单因子模型估计得到.从投资组合的角度,本研究选取了等权重(EW)投资组合作为投资组合门槛模型.

本研究通过以下指标来衡量样本外投资组合的表现:1) 年化收益率;2) 年化标准差;3) 修正风险价值(Modified VaR);4) 标准化偏度与超额峰度;5) 年化夏普比率;6) 换手率(Turnover);7) 最大回撤(Max Drawdown).其中修正风险价值定义如式(29)所示,换手率定义为

$$Turnover = \frac{1}{T_0 - 1} \sum_{t=1}^{T_0-1} Turnover_t$$

$$= \frac{1}{T_0 - 1} \sum_{t=1}^{T_0-1} \sum_{i=1}^N |w_{i,t+1} - w_{i,t}| \quad (30)$$

其中 $Turnover_t = \sum_{i=1}^N |w_{i,t+1} - w_{i,t}|$ 为 t 时刻到 $t+1$ 时刻的换手率, T_0 为样本外长度.对于所有样本外表现,本文考虑了可能存在交易费用,考虑交易费用的投资组合收益率定义为

$$\tilde{R}_t = R_t(1 - c * Turnover_t) \quad (31)$$

其中 c 为交易费率,设定为 0.5%.在计算夏普比率时,本文选择央行公布的一年定存基准利率作为市场无风险利率.本节中动态投资组合目标函数为 CARA 效用函数 ($\gamma = 10$),同时投资组合不考虑卖空 ($\forall w_i \geq 0$).

表5 样本外投资组合表现

Table 5 Out of sample portfolio performance

评价指标 / 投资模型	年化收益率 / %	年化标准差 / %	风险价值 / %	偏度	超额峰度	夏普比率	换手率	最大回撤 / %
(A) 资产规模 $N = 10$								
EW	2.954	27.547	2.942	-0.646	5.429	0.069	0.000	56.855
SF-ECSNP	4.515	26.306	2.521	-0.487	11.816	0.131	0.538	55.173
SF-TVSNP	4.599	26.262	2.509	-0.445	11.482	0.134	0.539	54.857
ICASK	5.422	39.278	4.011	-0.463	6.445	0.110	1.975	74.271
EMWA	2.356	27.120	2.908	-0.631	4.961	0.048	0.252	57.679
SF	1.776	26.948	2.872	-0.630	5.544	0.027	0.172	58.550
MV	3.057	27.069	2.872	-0.614	5.545	0.074	0.196	57.274
(B) 资产规模 $N = 100$								
EW	3.142	24.231	2.642	-0.704	4.397	0.086	0.000	57.570
SF-ECSNP	3.982	16.508	1.687	-0.269	3.836	0.176	1.512	32.874
SF-TVSNP	4.050	16.511	1.688	-0.272	3.835	0.180	1.515	32.811
SF	2.536	18.209	1.928	-0.456	3.713	0.081	1.118	42.152
MV	1.694	18.015	1.896	-0.422	3.925	0.036	1.118	41.136

注:表格中数值为各方法在2010年1月1日至2019年6月30日的样本外滚动窗口投资组合表现.加粗数值为各项指标中最优.

表5给出了不同方法与不同资产规模($N = 10$ 与 $N = 100$)下样本外投资组合的表现.需要注意,当 $N = 100$ 时,ICASK与EMWA模型由于“维数灾难”的原因无法实现,因此本研究将其略去.

从表5中总结出以下几点结论:1) 以考虑交易费用后的夏普比率与最大回撤率作为评价标准,在所有资产规模下,SF-TVSNP(SF-ECSNP)投资组合有着最优表现,同时SF-TVSNP与SF-TVSNP表

③ EWMA模型中的移动平均参数设定为0.95.

现基本一致,这与表3的结论相符,对异质性成分的动态高阶矩建模产生的额外收益甚微;2)相较于其他动态投资组合,SF-TVSNP投资组合的表现更加稳健,体现在拥有更小的年化标准差、风险价值与最大回撤。当 $N = 10$ 时,尽管ICASK拥有较高的年化收益,但伴随的时较高的投资风险(39.278%的年化标准差,4.011%的风险价值与74.271%的最大回撤),而SF-TVSNP的风险指标均大幅优于ICASK,体现了该方法的稳健性。当 $N = 100$ 时,SF-TVSNP投资组合的各项风险指标均为最优,充分体现了SF-TVSNP模型所具有的额外经济价值;3)随着 N 从10增加到100,各投资组合风险指标均得到改善,体现了高维投资组合能够更好的分散风险的特点,其中SF-TVSNP投资组合的改进幅度最大;4)相较于ICASK投资组合,SF-TVSNP有着相对较小的换手率,同时静态投资组合比动态投资组合有着更小的换手率,这与Martellini和Ziemann^[13]的结论一致。随着 N 增大,SF-TVSNP投资组合与SF和MV投资组合换手率之间的差距减小。

综合以上结论可以得到SF-TVSNP(SF-ECSNP)模型相较于现有的动态(静态)协高阶矩估计方法有着更高的经济价值。纵向来看,引入了因子与异质性成分的高阶矩时变结构的SF-TVSNP模型对静态因子模型进行了改进;横向来看,因子模型相较于独立成分分析更加适合解决协高阶矩的“维数灾难”问题,这体现在SF-ECSNP模型相较于ICASK模型有更优且更稳定的表现,同时SF-ECSNP模型能够应用于高维投资组合,有利于更好的分散风险。

5.5 稳健性分析

本节将评估5.4节的实证结果对实证设计和参数设定的各种变化的敏感性。具体来说,本研究考虑了以下四种不同的设定并探究其对动态投资组合结果的影响。

1) 考虑到因子和异质性成分的条件异方差结构可能存在的非对称效应和杠杆效应,本文考虑了GJR-GARCH(1,1)和TGARCH(1,1)拟合条件异方差结构。GJR-GARCH的设定如下

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 \sigma_{t-1}^2 + [\omega_2 + \omega_3 \max(z_{t-1}, 0)] z_{t-1}^2 \quad (32)$$

GJR-GARCH能够捕捉到一个GARCH模型无法描述的实证现象,即 $t-1$ 时刻的负面冲击比正面

冲击对 t 时刻的方差有更强烈的影响,即杠杆效应。TGARCH则通过一个分段结构对条件方差中的非对称效应进行拟合,其设定如下

$$\sigma_t = \omega_0 + \omega_1 \sigma_t + \omega_2^+ \max(z_{t-1}, 0) + \omega_2^- \min(z_{t-1}, 0) \quad (33)$$

2) 投资组合优化函数中参数设定直接反映了投资者的偏好,例如CRRA期望效用函数中的 γ 参数反映了投资者的风险厌恶程度,本研究进而考虑了 $\gamma = 1$ (较低风险厌恶程度)和 $\gamma = 15$ (较高风险厌恶程度)时投资组合的表现。

3) 考虑以式(29)的VaR函数作为投资组合优化函数。VaR函数中 α 代表优化的风险价值的水平,越小的 α 代表着越高的对于极端风险的承受能力,本文在稳健性分析中取 $\alpha = 0.01$ 与 $\alpha = 0.05$ 。

4) 本文考虑了样本长度对于估计结果的影响。为了不改变样本外区间(2010年1月1日—2019年6月30日),本文选择了如下两种不同的滚动样本:第一,仍然以2005年7月1日—2009年12月31日作为起始估计,但采用递归样本对样本外区间进行滚动估计;第二,以2006年1月1日—2009年12月31日(共4年日度数据)作为起始估计,仍然采用滚动窗口方式对样本外区间进行滚动估计。两种方法分别对应着较多和较少的样本长度。

为使稳健性分析更具代表性,减少样本选择偏误,本研究仅考虑高维投资组合($N = 100$),同时由于SF-ECSNP与SF-TVSNP模型表现基本一致,限于篇幅,本文仅汇报上述设定对SF-ECSNP模型的影响,评价标准仍然采用5.4节介绍的评价指标。表6给出了上述四种稳健性检验的样本外表现。对于检验1)采用GJR-GARCH或TGARCH设定后,SF-ECSNP的表现有所提升,这与理论相符,由于GJR-GARCH与TGARCH捕捉到了条件异方差结构的杠杆效应,进而提升了投资组合整体表现;对于检验2)与检验3),表6的结论与表5基本保持一致,即SF-ECSNP模型对于目标函数与风险厌恶程度具有稳健性;对于检验4)4年期滚动窗口会使投资组合表现小幅降低,这是由于时变结构的估计需要较大样本量支持,尤其是时变高阶矩结构方程的估计。另一方面,当采用递归样本进行样本外投资组合时,年化收益率与夏普比

率有所提升,但各项风险指标有所下降,可能原因是数据时间跨度太长,例如始终包含2008年次贷危机的极端数据对模型进行估计,这不利于估计过程中新的结构进入.综合稳健性分析的结果,SF-ECSNP模型的各项风险指标表现具有稳健

性.这与蒙特卡洛模拟的结论一致,通过引入半参数分布保证了条件高阶矩估计量的稳健性,进而保证了动态投资组合稳定的超额收益.另外,根据稳健性分析的结果,可以通过引入GJR-GARCH(或TGARCH)结构改进动态投资组合表现.

表6 SF-ECSNP投资组合的稳健性分析

Table 6 The robust checks of the SF-ECSNP portfolio

评价指标		年化收益	年化标准	风险价值	偏度	超额峰度	夏普比率	换手率	最大回撤
检验模型		率 / %	差 / %	/ %					/ %
检验(1)	TGARCH	5.232	16.184	1.630	-0.192	3.682	0.256	1.034	33.800
	GJR-GARCH	4.977	16.222	1.634	-0.188	3.707	0.240	1.037	33.828
检验(2)	EU($\gamma = 1$)	4.372	17.214	1.695	-0.277	6.792	0.192	1.148	33.223
	EU($\gamma = 15$)	4.753	17.223	1.701	-0.289	6.686	0.213	1.186	32.639
检验(3)	VaR($\alpha = 0.01$)	4.428	17.217	1.679	-0.229	6.897	0.195	1.169	33.976
	VaR($\alpha = 0.05$)	3.616	17.378	1.701	-0.234	6.799	0.147	1.122	33.800
检验(4)	4年滚动窗口	3.858	17.760	1.807	-0.350	5.309	0.157	1.100	41.028
	递归样本	6.158	18.700	1.947	-0.376	3.477	0.271	1.396	42.483

注:表格中数值为SF-ECSNP模型在2010年1月1日至2019年6月30日的样本外投资组合表现.

6 结束语

基于协高阶矩的投资组合研究不可避免的需要解决协高阶矩估计存在的“维数灾难”问题.在时变协高阶矩建模中,绝大多数学者都采用独立成分分析或动态条件相关的方式进行降维,将多维时变协高阶矩建模转化为多个独立潜在序列的时变高阶矩建模,由于其假设的严苛和复杂的计算,这类模型在现实数据的表现并不好,只能用于低维投资组合且可能存在严重的模型误设问题.因此本研究提出了一种基于半参数分布因子(SF-TVSNP)模型的时变协高阶矩建模方法,通过因子结构对时变协高阶矩进行分解降维,同时引入半参数分布提高模型的稳健性.本研究在Martellini和Ziemann的静态单因子协高阶矩估计中,赋予因子与异质性成分时变半参数分布,对时变半参数分布的形状参数进行建模,通过OLS回归和两阶段极大似然估计分别估计了因子载荷,因子时变结构和异质性成分时变结构.进一步通过协高阶矩在因子模型下的分解,最终给出了时变协高阶矩的估计.蒙特卡洛模拟证实了时变半参数分布建模的稳健性.基于沪深300指数成分股的动

态投资组合分析和稳健性检验证实了SF-TVSNP模型存在稳定的、额外的经济价值.

主要研究结果: 1) 通过建立SF-TVSNP模型估计金融资产收益率的时变协高阶矩,给出了模型设定,估计和时变高阶矩时变检验方法,丰富了时变协高阶矩估计相关文献; 2) 实证分析表明,沪深300指数存在显著时变高阶矩特征,并且呈现出类似于波动率的聚集性,当金融危机发生时,条件偏度会负向聚集,而条件峰度会正向聚集.同时,其成分股异质性成分的时变高阶矩特征并不普遍存在,基于此,本研究构建更加容易估计的SF-ECSNP模型; 3) 相比于现有动态(静态)协高阶矩估计方法,基于SF-TVSNP模型的投资组合有更优的样本外表现,各项风险指标均优于现有方法.同时,SF-TVSNP模型能够应用于高维投资组合($N = 100$),实现了高维动态高阶矩投资组合; 4) 基于SF-TVSNP模型的投资组合通过了稳健性检验,其表现基本不会受到用户设定的影响.本研究提供了一种更合理、表现更好、更稳定的高维时变协高阶矩建模方法.基于研究结论,可以为市场投资参与者和市场监督管理者提供风险管理技术和科学决策依据.

参考文献:

- [1] Ang A, Chen J. Asymmetric correlations of equity portfolios [J]. *Journal of Financial Economics*, 2002, 63(3): 443–494.
- [2] 陈国进, 晁江锋, 赵向琴. 灾难风险、习惯形成和含高阶矩的资产定价模型 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(4): 1–17+72.
Chen Guojin, Chao Jiangfeng, Zhao Xiangqin. Disaster risk, habit formation and an asset pricing model with higher moments [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(4): 1–17+72. (in Chinese)
- [3] 胡扬斌, 谢赤, 曹玺. 耦合风险视角下基于 GARCH-Copula 模型的基金组合风险研究 [J]. *管理科学学报*, 2019, 22(6): 113–126.
Hu Yangbin, Xie Chi, Cao Xi. Fund portfolio risk based on GARCH-Copula model from the perspective of coupled risk [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2019, 22(6): 113–126. (in Chinese)
- [4] 杨子晖, 陈雨恬, 陈里璇. 极端金融风险的有效测度与非线性传染 [J]. *经济研究*, 2019, 54(5): 63–80.
Yang Zihui, Chen Yutian, Chen Lixuan. Effective measurement and nonlinear contagion of extreme financial risk [J]. *Economic Research Journal*, 2019, 54(5): 63–80. (in Chinese)
- [5] Markowitz H M. Portfolio selection [J]. *Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77–91.
- [6] Scott R C, Horvath P A. On the direction of preference for moments of higher order than the variance [J]. *Journal of Finance*, 1980, 35(4): 915–919.
- [7] Arrow K J. The Economic Implications of Learning by Doing. *Readings in the Theory of Growth* [M]. London: Palgrave Macmillan, 1971.
- [8] Dittmar R. Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross section of equity returns [J]. *Journal of Finance*, 2002, 57(1): 369–403.
- [9] 蒋翠侠, 许启发, 张世英. 金融市场条件高阶矩风险与动态组合投资 [J]. *中国管理科学*, 2007, 15(1): 27–33.
Jiang Cuixia, Xu Qifa, Zhang Shiyong. Conditional higher moments risk and dynamic portfolio in financial markets [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2007, (1): 27–33. (in Chinese)
- [10] 王鹏, 吴金宴. 基于协高阶矩视角的沪港股市风险传染分析 [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(6): 29–42.
Wang Peng, Wu Jinyan. Risk contagion between Shanghai and Hong Kong stock market: A perspective of higher order comoments [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(6): 29–42. (in Chinese)
- [11] 鲁万波, 黄光麟, Kris Boudt. 股市涨跌预测与量化投资策略: 基于时变矩成分分析 [J]. *中国管理科学*, 2020, 28(2): 1–12.
Lu Wanbo, Huang Guanglin, Kris Boudt. Stock market rise-fall forecast and quantitative investment strategy: Based on time varying MCA [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2020, 28(2): 1–12. (in Chinese)
- [12] 彭胜志, 王福胜. 基于半定规划松弛的高阶投资组合优化研究 [J]. *管理工程学报*, 2013, 27(2): 88–93.
Peng Shengzhi, Wang Fusheng. Portfolio optimization with higher order moments based on semidefinite programming relaxation [J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2013, 27(2): 88–93. (in Chinese)
- [13] Martellini L, Ziemann V. Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection [J]. *Review of Financial Studies*, 2010, 23(4): 1467–1502.
- [14] Boudt K, Lu W, Peeters B. Higher order comoments of multifactor models and asset allocation [J]. *Finance Research Letters*, 2015, 13: 225–233.
- [15] Boudt K, Cornilly D, Verdonck T. Nearest comoment estimation with unobserved factors [J]. *Journal of Econometrics*, 2020, 217(2): 381–397.
- [16] Jondeau E, Rockinger M. On the importance of time variability in higher moments for asset allocation [J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2012, 10(1): 84–123.
- [17] Ghalanos A, Rossi E, Urga G. Independent factor autoregressive conditional density model [J]. *Econometric Reviews*, 2015, 34(5): 594–616.
- [18] Goyal A. Empirical cross-sectional asset pricing: A survey [J]. *Financial Markets and Portfolio Management*, 2012, 26(1): 3–8.
- [19] Bailey N, Kapetanios G, Pesaran M H. Measurement of factor strength: Theory and practice [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2021, 36(5): 587–613.
- [20] 杨冬, 康继军, 鲁万波. 基于混频模型的高阶矩最优因子个数识别研究 [J]. *数量经济技术经济研究*, 2020, 37(1): 141–164.
Yang Dong, Kang Jijun, Lu Wanbo. Determining the number of factors of higher-order co-moments based on MIDAS model [J]. *Journal of Quantitative and Technical Economics*, 2020, 37(1): 141–164. (in Chinese)
- [21] Santos A A, Moura G V. Dynamic factor multivariate GARCH model [J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2014, 76: 606–617.
- [22] Guo S, Box J L, Zhang W. A dynamic structure for high-dimensional covariance matrices and its application in portfolio al-

- location [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2017, 112(517): 235–253.
- [23] 姜富伟, 马甜, 张宏伟. 高风险低收益? 基于机器学习的动态 CAPM 模型解释 [J]. *管理科学学报*, 2021, 24(1): 109–126.
Jiang Fuwei, Ma Tian, Zhang Hongwei. High risk low return? Explanation from machine learning based conditional CAPM model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2021, 24(1): 109–126. (in Chinese)
- [24] Hansen B E. Autoregressive conditional density estimation [J]. *International Economic Review*, 1994, 35(3): 705–730.
- [25] León Á, Rubio G, Serna G. Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis [J]. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 2005, 45(4–5): 599–618.
- [26] León Á, Níguez T M. Modeling asset returns under time-varying semi-nonparametric distributions [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2020, 118(29): 105870.
- [27] León Á, Níguez T M. The transformed Gram Charlier distribution: Parametric properties and financial risk applications. *Journal of Empirical Finance* [J], 2021, 63: 323–349.
- [28] Jondeau E, Rockinger M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: Existence, persistence, and comovements [J]. *Journal of Economic dynamics and Control*, 2003, 27(10): 1699–1737.
- [29] 王鹏. 基于时变高阶矩波动模型的 VaR 与 ES 度量 [J]. *管理科学学报*, 2013, 16(2): 33–45+94.
Wang Peng. Calculating VaR and ES based on volatility models with time-varying higher moments [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(2): 33–45+94. (in Chinese)
- [30] 许启发. 高阶矩波动性建模及应用 [J]. *数量经济技术经济研究*, 2007, 23(12): 135–145.
Xu Qifa. Modeling and application of higher moments volatility [J]. *Journal of Quantitative and Technical Economics*, 2007, 23(12): 135–145. (in Chinese)
- [31] 王鹏, 王建琼, 魏宇. 自回归条件方差-偏度-峰度: 一个新的模型 [J]. *管理科学学报*, 2009, 12(5): 121–129.
Wang Peng, Wang Jianqiong, Wei Yu. Autoregressive conditional volatility-skewness-kurtosis: A new model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2009, 12(5): 121–129. (in Chinese)
- [32] Feunou B, Jahan-Parvar M R, Tedongap R. Which parametric model for conditional skewness? [J]. *The European Journal of Finance*, 2016, 22(13): 1237–1271.
- [33] 贾婧, 鲁万波, 柯睿. 基于回归的时变偏度和时变峰度识别检验 [J]. *统计研究*, 2018, 35(11): 116–128.
Jia Jing, Lu Wanbo, Ke Rui. Regression-based tests for identifying time-varying skewness and kurtosis [J]. *Statistical Research*, 2018, 35(11): 116–128. (in Chinese)
- [34] Vuong Q H. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses [J]. *Econometrica*, 1989, 57(2): 307–333.

High dimensional time-varying higher-order co-moments modeling and its application in portfolio selection: Based on a single factor semi-nonparametric distribution model

HUANG Guang-lin¹, LU Wan-bo^{2*}

1. School of Statistics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
2. School of Management Science and Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China

Abstract: This paper proposes a dynamic time-varying higher-order co-moment modeling method based on a single factor time-varying semi-nonparametric (SF-TVSNP) model. The model specification, model estimation and model selection approaches are given. The single factor model can efficiently reduce “the curse of dimensionality” problem in the time-varying higher-order co-moments estimation, and the semi-parametric structure can improve the robustness of the SF-TVSNP model. The empirical studies show that the SF-TVSNP model can effectively capture the time-varying structure of higher-order co-moments of asset returns and is more suitable for the latent structure of asset returns. Further, high-dimensional dynamic portfolios based on the SF-TVSNP model can be applied to high-dimensional scenarios and generate higher and stable economic value, as further confirmed by robust analysis.

Key words: factor model; semi-nonparametric distribution; time-varying higher-order co-moments modelling; dynamic portfolios