

[新设备·新材料·新方法]

DOI:10.3969/j.issn.1005-2895.2023.01.013

星型人字齿轮传动系统非线性分岔特性

白壮华¹, 林何^{1,2*}

(1. 西安工程大学机电工程学院, 陕西 西安 710048;
2. 西安工程大学西安市现代智能纺织装备重点实验室, 陕西 西安 710600)

摘要:为探究星型人字齿轮传动系统分岔动力学特性,课题组采用集中质量法建立了星型人字齿轮系统的纯扭转非线性动力学模型,通过 Runge-Kutta 法求解了系统非线性振动微分方程,利用相图、Poincaré 截面法和分岔特性等分析手段研究了不同转速条件下啮合阻尼比对系统振动响应及分岔特性的影响。结果表明:系统在不同转速下会表现出丰富的非线性动力学行为;随着啮合阻尼比的增大,系统通过倒分岔从混沌状态进入倍周期状态,再由倍周期状态进入单周期状态。因此,在保证系统传动效率的前提下适当提高系统的啮合阻尼比,能够明显弱化系统的混沌运动,减小其振动响应,提高系统稳定性,对系统噪声的降低和寿命的延长具有一定的帮助。

关键词:星型人字齿轮;非线性分岔;Poincaré 截面;Runge-Kutta 法;混沌

中图分类号:TH132.41;TH164 文献标志码:A 文章编号:1005-2895(2023)01-0079-06

Non-Linear Bifurcation Characteristics of Star Herringbone Gear Transmission System

BAI Zhuanghua¹, LIN He^{1,2*}

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an Polytechnic University, 710048 Xi'an, China;
2. Xi'an Key Laboratory of Modern Intelligent Textile Equipment, Xi'an Polytechnic University, 710600 Xi'an, China)

Abstract: To investigate the bifurcation dynamic characteristics of the star herringbone gear transmission system, a pure torsional nonlinear dynamic model of the star herringbone gear system was established by lumped mass method, and the nonlinear vibration equation of the system was solved by Runge-Kutta method. The effects of meshing damping ratio on the vibration response and bifurcation characteristics of the system at different rotational speeds were analyzed by phase diagram, Poincaré section method and bifurcation characteristics. The results show that the system exhibits abundant nonlinear dynamic behavior at different rotational speeds. With the increase of meshing damping ratio, the system goes from chaotic state to period-doubling state and then from period-doubling state to single-cycle state through inverted bifurcation. Therefore, on the premise of ensuring the transmission efficiency of the system, properly increasing the meshing damping ratio of the system can obviously weaken the chaotic motion of the system, reduce its vibration response, improve the stability of the system, and help to reduce the noise of the system and prolong its service life.

Keywords: star herringbone gear; non-linear bifurcation; Poincaré cross section; Runge-Kutta method; chaos

齿轮装置广泛应用于大型重工机械和小型精密仪器等领域中,齿轮系统在各种非线性因素耦合干扰下,产生的振动和噪声极大地恶化了工作环境,因此为改善齿轮系统的工作稳定性及传动噪声,对齿轮系统动

收稿日期:2022-07-10;修回日期:2022-11-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51805402);陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2019JQ-851);中国纺织工业联合会科技指导性计划项目(2020068)

第一作者简介:白壮华(1998),男,陕西榆林人,硕士研究生,主要从事齿轮系统非线性动力学研究。通信作者:林何(1985),男,湖北襄阳人,博士,副教授,主要从事齿轮系统非线性动力学、混沌控制等研究。E-mail:linhe@xpu.edu.cn

力学特性研究和优化是非常必要的^[1-3]。星型人字齿轮传动系统因其功率密度高、传动比大和结构强度等优点常应用于重载和可靠性要求高的设备中。为了解星型齿轮系统振动分岔行为,改善其响应性态,很多国内外学者对其动力学行为和振动特性进行了研究和优化^[4-5]。Kahrarman^[6]建立了单级行星齿轮传动系统的纯扭转动力学方程,通过数值求解得到了行星齿轮传动系统的模态和振型;邱星辉等^[7]从研究现状、动力学优化设计和发展方向等方面对风力发电机行星齿轮传动系统动力学进行了综述;林何等^[8]推导了行星人字齿轮啮合传动的时变啮合刚度动态梯形图,建立了人字齿行星齿轮传动的扭转非线性动力学模型,并对系统拟周期振动特性进行了分析;李同杰等^[9]建立了直齿行星齿轮传动纯扭转动力学模型,分析了激励频率、齿侧间隙对该系统动力学特性的影响。Wei等^[10]利用虚拟等效轴单元的动力学建模方法构建了人字齿行星齿轮系统的动力学模型;Mo等^[11]基于集中参数理论和 Lagrange 方法建立了人字齿行星传动系统的动力学模型。

为研究啮合阻尼比对星型人字齿轮系统分岔特性的影响,课题组建立了星型人字齿轮系统纯扭转非线性动力学模型,利用 Runge-Kutta 法对动力学微分方程数值求解,通过不同转速下系统的相图、庞加莱 (Poincaré) 截面和分岔图对系统分岔演化过程进行研究,分析不同转速条件下啮合阻尼比对系统振动响应及分岔特性的影响。

1 系统非线性动力学模型

课题组采用集中质量法建立星型人字齿轮传动系统非线性动力学模型,系统端面动力学模型如图 1 所示。该系统功率主要由太阳轮输入并分流到行星轮,再由行星轮汇集到内齿圈进行输出。其中 k_{spi}, k_{rpi} ($i = 1, 2, 3$) 分别为太阳轮和行星轮、行星轮和内齿圈之间的啮合刚度,各弹性支承及啮合副均有阻尼和尺侧间隙。 θ_s, θ_{pi} ($i = 1, 2, 3$) 和 θ_r 分别为太阳轮、第 i 个行星轮和内齿圈的旋转振动位移。

为了更直观地表明各构件的运动情况,针对任一个行星轮 i 建立如图 2 所示的啮合型动力学模型。系统中所有齿轮均为入字齿轮,将每个人字齿轮视为由

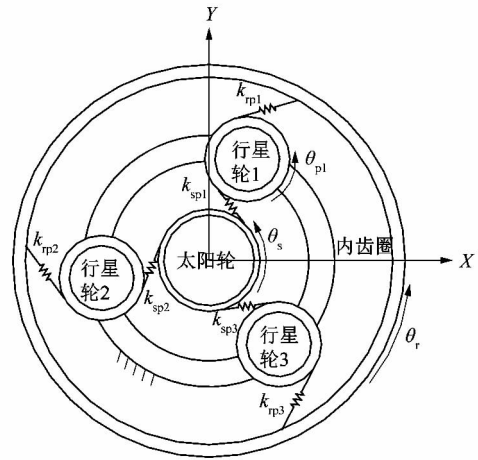


图 1 星型人字齿轮系统传动系统端面模型

Figure 1 End face model of star herringbone gear transmission system

2 个完全相同仅旋向相反的斜齿轮拼合而成,中间为欧拉梁单元连接,图中质量节点 $s1, s2$ 分别代表太阳轮左、右 2 个斜齿轮; $pi1, pi2$ 分别代表行星轮 i ($i = 1, 2, 3$) 左、右两侧斜齿轮; $r1, r2$ 代表内齿圈左、右 2 个斜齿轮;斜齿轮基圆螺旋角为 β_1, β_2 (左旋为正,右旋为负),故有 $\beta_2 = -\beta_1$; c_{spi}, c_{rpi} ($i = 1, 2, 3$) 分别为太阳轮和行星轮、行星轮和内齿圈之间的啮合阻尼; e_{spi}, e_{rpi} ($i = 1, 2, 3$) 分别为太阳轮和行星轮、行星轮和内齿圈之间的综合传动误差; b 为尺侧间隙; T_s, T_r 分别为输入扭矩和输出扭矩。

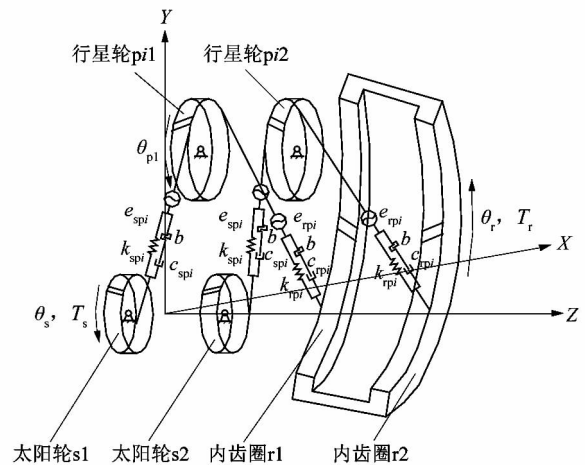


图 2 星形人字齿轮传动系统动力学模型

Figure 2 Dynamic model of star herringbone gear transmission system

星型人字齿轮系统主要动力学参数如表 1 所示。行星轮个数为 3,模数为 4 mm,安装角 α_{pi} ($i=1,2,3$) 分别为 $0, 2\pi/3, 4\pi/3$,法面压力角 α_n 为 20° ,基圆螺旋角 β 为 22.5° ,平均啮合刚度取 $2 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$,太阳轮输入功率为 3 000 kW,刚度波动系数为 0.1,输入、输出扭矩波动系数为 0.5,尺侧间隙值为 0.1 mm。

根据牛顿第二运动定律构建系统动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} I_{s1} \ddot{\theta}_{s1} &= - \sum_{i=1}^3 (k_{spi} \Gamma_{spi1} + c_{spi} \dot{\Gamma}_{spi1}) \cos \beta_1 r_{s1} + T_s; \\ I_{s2} \ddot{\theta}_{s2} &= - \sum_{i=1}^3 (k_{spi} \Gamma_{spi2} + c_{spi} \dot{\Gamma}_{spi2}) \cos \beta_2 r_{s2}; \\ I_{r1} \ddot{\theta}_{r1} &= - \sum_{i=1}^3 (k_{rpi} \Gamma_{rpi1} + c_{rpi} \dot{\Gamma}_{rpi1}) \cos \beta_1 r_{r1}; \\ I_{r2} \ddot{\theta}_{r2} &= - \sum_{i=1}^3 (k_{rpi} \Gamma_{rpi2} + c_{rpi} \dot{\Gamma}_{rpi2}) \cos \beta_2 r_{r2} + T_r; \\ I_{pi1} \ddot{\theta}_{pi1} &= (k_{rpi} \Gamma_{rpi1} + c_{rpi} \dot{\Gamma}_{rpi1}) \cos \beta_1 r_{pi1} - (k_{spi} \Gamma_{spi1} + c_{spi} \dot{\Gamma}_{spi1}) \cos \beta_1 r_{pi1}; \\ I_{pi2} \ddot{\theta}_{pi2} &= (k_{rpi} \Gamma_{rpi2} + c_{rpi} \dot{\Gamma}_{rpi2}) \cos \beta_2 r_{pi2} - (k_{spi} \Gamma_{spi2} + c_{spi} \dot{\Gamma}_{spi2}) \cos \beta_2 r_{pi2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 I 为部件的转动惯量。

用傅里叶级数展开定义轮齿时变啮合刚度:

$$k(t) = K + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} (\sin(i\omega t + \varphi_0)), \quad (i=1,2,3, \dots, n). \quad (2)$$

式中: K 为时变啮合刚度均值, ω 为啮合频率, ε 为时变啮合刚度波动系数, φ_0 为啮合初始相位角。

定义初始相位角:

$$\varphi_{spi} = \alpha_1 - \alpha_{pi}; \varphi_{rpi} = \alpha_1 + \alpha_{pi}. \quad (3)$$

式中 α_i 为齿轮端面压力角。

太阳轮和第 i 个行星轮左、右侧沿啮合线方向的相对位移 $\Gamma_{spi1}, \Gamma_{spi2}$, 内齿圈和第 i 个行星轮左、右侧沿啮合线方向的相对位移 $\Gamma_{rpi1}, \Gamma_{rpi2}$, 分别为:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{spi1} &= (r_{s1} \theta_{s1} + r_{pi1} \theta_{pi1}) \cos \beta_1 - e_{i1}(t); \\ \Gamma_{spi2} &= (r_{s2} \theta_{s2} + r_{pi2} \theta_{pi2}) \cos \beta_2 - e_{i2}(t); \\ \Gamma_{rpi1} &= (r_{r1} \theta_{r1} - r_{pi1} \theta_{pi1}) \cos \beta_1 - e_{i3}(t); \\ \Gamma_{rpi2} &= (r_{r2} \theta_{r2} - r_{pi2} \theta_{pi2}) \cos \beta_2 - e_{i4}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $e_{ij}(t) = E \sin(\omega t + \varphi_0)$, 其中 $i=1,2,3, j=1, 2,3,4$; E 为综合传动误差幅值。

定义量纲为一位移标称尺度 $\Delta = 10^{-4} \text{ m}$ 和量纲为

表 1 星型人字齿轮系统部分动力学参数

Table 1 Partial dynamic parameters of star herringbone gear train

名称	齿数 z	质量 m/kg	转动惯量 $I/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
太阳轮	36	5.301 8	0.022 6
行星轮	32	4.509 9	0.014 9
内齿圈	100	16.084 3	0.656 4

一化时间标称尺度 $Y = \sqrt{K(1/M_s + 1/M_p)} \circ M_s$ 和 M_p 为太阳轮和行星轮的等效质量。由此得到量纲为一的时间 τ 、振动位移 Λ 和尺侧间隙 δ 分别为:

$$\tau = Yt, \Lambda(\tau) = \Gamma(t), \delta = b/\Delta.$$

系统消刚体位移和量纲为一的动力学微分方程:

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda}_{spi1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{s1} Y} \sum_{i=1}^3 c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y} c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi1} - \\ \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y} c_{rpi1} \dot{\Lambda}_{rpi1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{s1} Y^2} \sum_{i=1}^3 k_{spi} f(\Lambda_{spi1}) + \\ \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y^2} k_{spi} f(\Lambda_{spi1}) - \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y^2} k_{rpi1} f(\Lambda_{rpi1}) = \frac{r_{s1} T_s}{I_{s1} \Delta Y^2} \cos \beta_1; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda}_{spi2} + \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{s2} Y} \sum_{i=1}^3 c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi2} + \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y} c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi2} - \\ \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y} c_{rpi2} \dot{\Lambda}_{rpi2} + \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{s2} Y^2} \sum_{i=1}^3 k_{spi} f(\Lambda_{spi2}) + \\ \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y^2} k_{spi} f(\Lambda_{spi2}) - \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y^2} k_{rpi2} f(\Lambda_{rpi2}) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Lambda}_{rpi1} - \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y} c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi1} + \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{r1} Y} \sum_{i=1}^3 c_{rpi} \dot{\Lambda}_{rpi1} + \\ \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y} c_{rpi} \dot{\Lambda}_{rpi1} - \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y^2} k_{spi} f(\Lambda_{spi1}) + \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \beta_1}{m_{r1} Y^2} \sum_{i=1}^3 k_{rpi} f(\Lambda_{rpi1}) + \frac{\cos^2 \beta_1}{m_{pi1} Y^2} k_{rpi} f(\Lambda_{rpi1}) = 0; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\Lambda}_{rpi2} - \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y} c_{spi} \dot{\Lambda}_{spi2} + \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{r2} Y} \sum_{i=1}^3 c_{rpi} \dot{\Lambda}_{rpi2} + \\ & \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y} c_{rpi} \dot{\Lambda}_{rpi2} - \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y^2} k_{spi} f(\Lambda_{spi2}) + \\ & \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{r2} Y^2} \sum_{i=1}^3 k_{rpi} f(\Lambda_{rpi2}) + \frac{\cos^2 \beta_2}{m_{pi2} Y^2} k_{rpi} f(\Lambda_{rpi2}) = \\ & \frac{r_{r2} T_r}{I_{r2} \Delta Y^2} \cos \beta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $\Lambda, \dot{\Lambda}, \ddot{\Lambda}$ 分别为齿轮副沿啮合线方向上的量纲为一振动位移、速度和加速度。

$f(\Lambda)$ 为量纲为一的含尺侧间隙碰撞位移分段函数,即:

$$f(\Lambda) = \begin{cases} \Lambda - \delta/2, & \Lambda > \delta/2; \\ 0, & -\delta/2 \leq \Lambda \leq \delta/2; \\ \Lambda + \delta/2, & \Lambda < -\delta/2. \end{cases} \quad (9)$$

2 系统分岔特性分析

阻尼比是齿轮系统中重要的动力学参数。为研究阻尼比对星型人字齿轮系统分岔特性的影响,取不同太阳轮转速下系统在阻尼比范围为0.05~0.20时振动位移 Λ_{spi1} 的分岔过程。

图3为太阳轮转速为7 000 r/min时系统的分岔过程。系统首先经历混沌状态,随着阻尼比的增大系统经历倒分岔从混沌进入倍周期,由倍周期进入二周期,最后进入稳定的单周期运动。图4和图5为系统在混沌状态和二周期状态下的相图和Poincaré截面图。

图6为太阳轮转速为10 000 r/min时系统的分岔过程。系统首先经历混沌状态,随着阻尼比的增大系统直接跳跃激变为二周期运动,再由倒分岔进入单周期状态。图7和图8为系统在混沌状态和单周期状态下的相图和Poincaré截面图。

图9为太阳轮转速为13 000 r/min时系统的分岔过程。系统首先经历混沌状态,随着阻尼比的增大系统经历倒分岔从混沌进入四周期状态,再由四周期状态进入二周期状态,最后进入稳定的单周期运动状态。图10和图11为系统在混沌状态和四周期状态下的相图和Poincaré截面图。

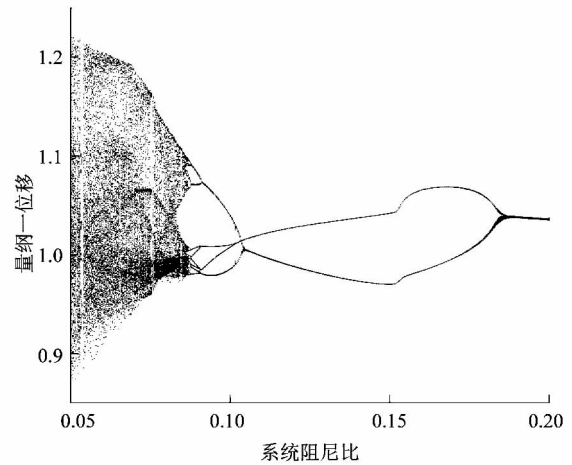


图3 转速为7 000 r/min时系统分岔过程

Figure 3 Bifurcation process of system at 7 000 r/min

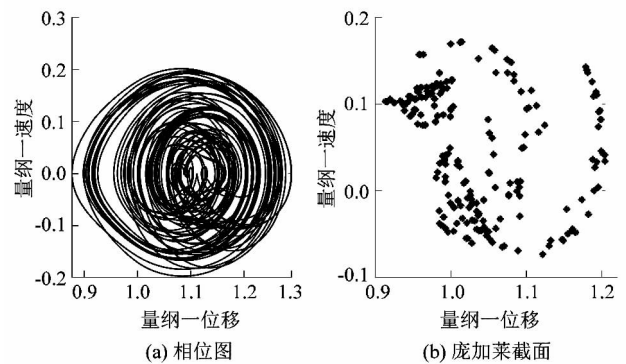


图4 阻尼比为0.06时系统混沌状态

Figure 4 Chaotic state of system with damping ratio at 0.06

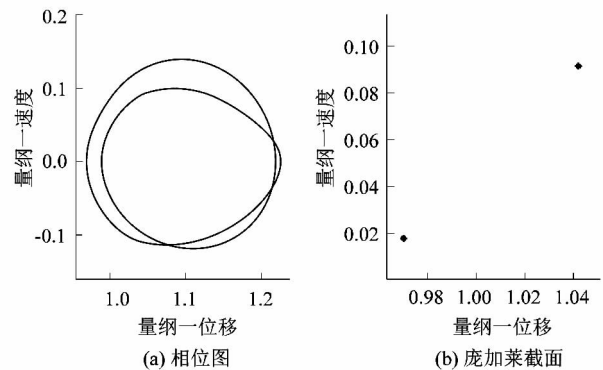


图5 阻尼比为0.15时系统二周期状态

Figure 5 Two-cycle state of system with damping ratio at 0.15

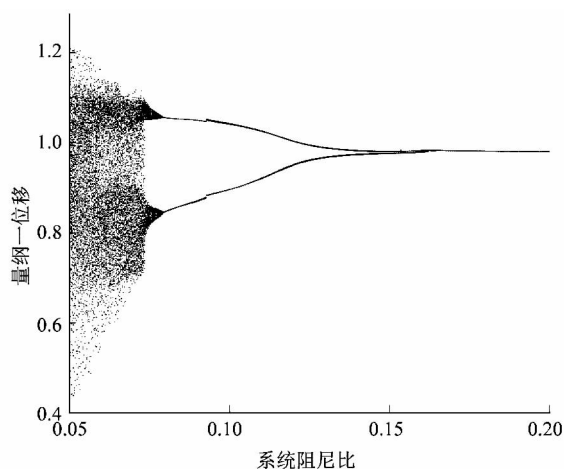


图6 转速为10 000 r/min时系统分岔过程

Figure 6 Bifurcation process of system at 10 000 r/min

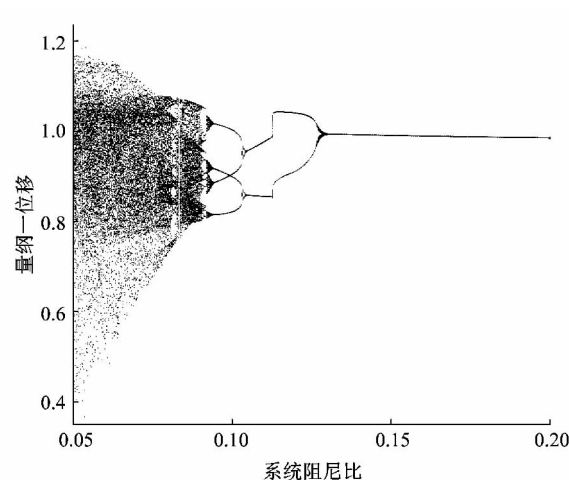


图9 转速为13 000 r/min时系统分岔过程

Figure 9 Bifurcation process of system at 13 000 r/min

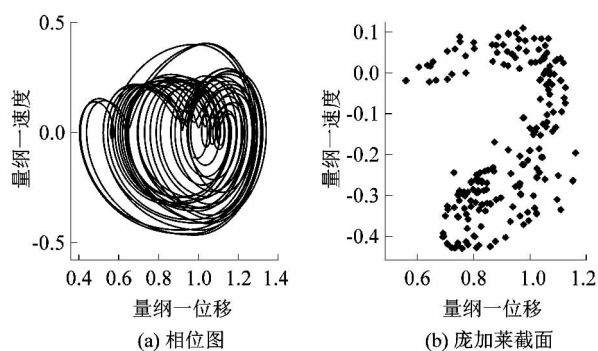


图7 阻尼比为0.06时系统混沌状态

Figure 7 Chaotic state of system with damping ratio at 0.06

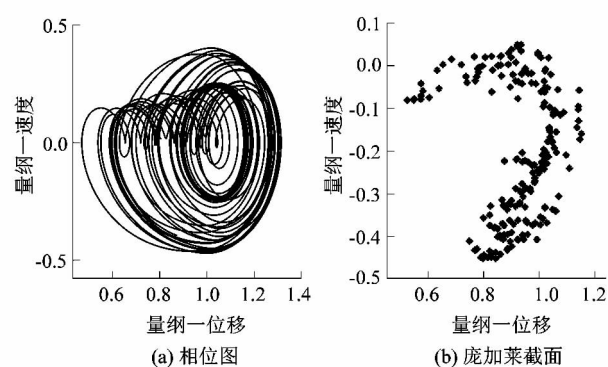


图10 阻尼比为0.06时系统混沌状态

Figure 11 Chaotic state of system with damping ratio at 0.06

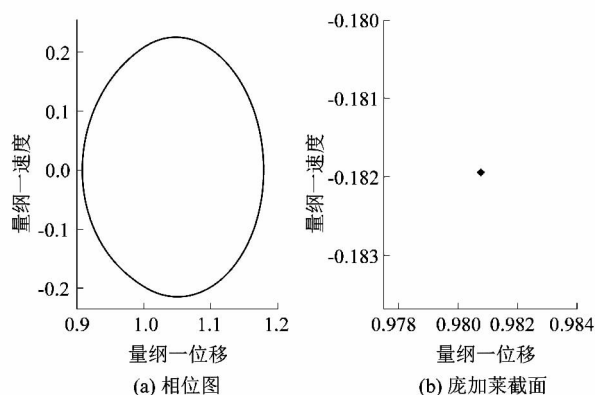


图8 阻尼比为0.18时系统单周期状态

Figure 8 One-cycle state of system with damping ratio at 0.18

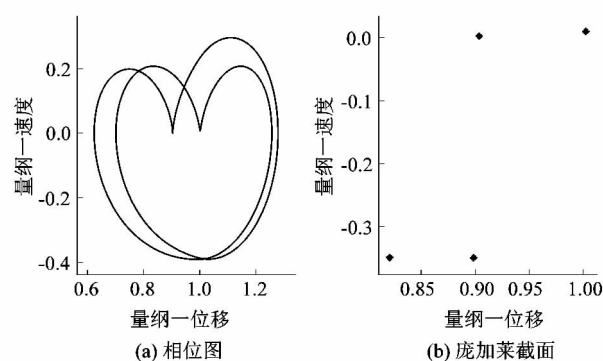


图11 阻尼比为0.10系统四周期状态

Figure 11 Four-cycle state of system with damping ratio at 0.10

由不同转速条件下系统随啮合阻尼比的分岔过程及其在各种状态下的相位图和 Poincaré 截面图可以发现:在不同工况条件下系统随啮合阻尼比的增大,均由复杂的混沌状态逐渐演变为了稳定的单周期运动状态。因此星型人字齿轮系统在满足工况要求的前提下,适当增大齿轮系统啮合阻尼比可以有效避开混沌运动状态,减小振动响应,提高系统稳定性,起到减震降噪的功效。

3 结语

课题组构建了星型人字齿轮传动系统纯扭转动力学模型,对模型进行了消刚体位移和量纲一化,并利用 Runge-Kutta 法对其进行了求解;通过系统在不同转速条件下的分岔通道揭示了阻尼比对星型人字齿轮系统分岔特性的影响,并通过相位图和 Poincaré 截面图分析了系统在相空间状态下的动态轨迹行为。结果表明:在不同转速工况下星型人字齿轮系统动力学行为均随阻尼比的增大从最开始的混沌状态逐渐趋于稳定。因此适当增大系统啮合阻尼比可以有效规避混沌运动,起到减振降噪的作用。

参考文献:

- [1] 王建军,李润芳. 齿轮系统动力学的理论体系[J]. 中国机械工程, 1998,9(12):55-58.
- [2] 杨宏斌,邓效忠,高建平,等. 齿轮非线性振动研究综述[J]. 中国机械工程,1999,10(7):807-809.
- [3] 王纯,韩加好,吉庆. 基于改进粒子群算法的齿轮传动优化设计研究[J]. 机电工程,2021,38(2):239-244.
- [4] 林何,王三民. 多激励下某直升机传动系统动载特性[J]. 航空动力学报,2015,30(1):219-227.
- [5] 赵宁,王俊,付晨曦. 齿轮分扭-并车传动系统设计与分析[J]. 机械设计与制造,2013(8):28-31.
- [6] KAHNARMAN A. Planetary gear train dynamics[J]. Journal of Mechanical Design,1994,116(3):713-720.
- [7] 邱星辉,韩勤锴,褚福磊. 风力机行星齿轮传动系统动力学研究综述[J]. 机械工程学报,2014,50(11):23-36.
- [8] 林何,王三民,董金城. 内、外啮合刚度激励下人字齿行星齿轮传动振动特性[J]. 西北工业大学学报,2016,34(5):893-899.
- [9] 李同杰,朱如鹏,鲍和云,等. 行星齿轮系扭转非线性振动建模与运动分岔特性研究[J]. 机械工程学报,2011,47(21):76-83.
- [10] WEI J,ZHANG A Q,QIN D T, et al. A coupling dynamics analysis method for a multistage planetary gear system[J]. Mechanism and Machine Theory,2017,110:27-49.
- [11] MO S,ZHANG T,JIN G G, et al. Influence mechanism of multi-coupling error on the load sharing characteristics of herringbone gear planetary transmission system[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part K Journal of Multi-Body Dynamics, 2019,233(4):792-816.
- [12] 王建军,李润芳. 齿轮系统动力学的理论体系[J]. 中国机械工程, 1998,9(12):55-58.
- [13] 刘坤林,刘杨. 基于石墨烯的柔性温度传感器制备[J]. 科技风, 2021(2):88.
- [14] GOMEZ-NAVARRO C, WEITZ R T, BITTNER A M, et al. Electronic transport properties of individual chemically reduced graphene oxide sheets[J]. Nano Letters,2009,9(5):2206-2206.
- [15] KAISER A B, GOMRZ-NAVARRO C, SUNDARAM R S, et al. Electrical conduction mechanism in chemically derived graphene monolayers[J]. Nano Letters,2009,9(5):1787-1792.
- [16] BI H C, YIN K B, XIE X, et al. Ultrahigh humidity sensitivity of graphene oxide[J]. Scientific Reports,2013,3(1):2714.
- [17] YAO Y, CHEN X D, ZHU J F, et al. The effect of ambient humidity on the electrical properties of graphene oxide films[J]. Nanoscale research letters,2012,7(1):363.
- [18] 李承臻. 柔性湿度传感器的制备与湿敏性能研究[D]. 成都:电子科技大学,2019:24-27.
- [19] WANG X W, XIONG Z P, LIU Z, et al. Exfoliation at the liquid/air interface to assemble reduced graphene oxide ultrathin films for a flexible noncontact sensing device[J]. Advanced Materials,2015,27(8):1370-1375.
- [20] GUO Z Y, XU J W, CHEN Y Q, et al. High-sensitive and stretchable resistive strain gauges; parametric design and DIW fabrication[J]. Composite Structures,2019,223:110955.
- [21] GUO Z Y, YU P S, LIU Y, et al. High-precision resistance strain sensors of multilayer composite structure via direct ink writing: optimized layer flatness and interfacial strength[J]. Composites Science and Technology,2021,201:108530.
- [22] 肖藤,刘聪,刘奕贤,等. 石墨烯/环氧树脂纳米复合材料温度传感器的热电阻效应[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2021,44(10):39.

(上接第78页)